Διαλέξεις 22-23

- Παραδείγματα και Υπολογισμοί Ολοκλήρωσης
- Οι κατανομές ως διαδικασίες Ολοκλήρωσης
- Ροπές

Υπενθύμιση: Περιορισμένος Ορισμός Ολοκλήρωσης

Ορισμός: Έστω $\mathbb{P}$ είναι κατανομή πιθανότητας στο $\mathbb{R}$, κ' η $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή. Τότε το ολοκλήρωμα της g ως προς την $\mathbb{P}$ (ή η αναμενόμενη τιμή της g ως προς την $\mathbb{P}$) ορίζεται ως εξής:

$$\mathbb{E}(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} g\, d\mathbb{P} := \begin{cases} \sum\limits_{i \in supp} g(i)\, \mathbb{P}(\{i\}), & \mathbb{P} \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(z) f(z)\, dz, & \text{η } f \text{ είναι η συνάρτηση πυκνότητας της } \mathbb{P}. \end{cases}$$

Παραδείγματα υπολογισμών: (ας ξαναθυμηθούμε το 5)

1. $\mathbb{P} = Poiss(\lambda)$, $\lambda > 0$ (κατανομή Poisson με παράμετρο λ)

   – $supp = \mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$ → απειροπληθές

   – $\mathbb{P}(\{i\}) = e^{-\lambda} \lambda^i / i!$, $i \in \mathbb{N}$

είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι υπάρχουν g για τις οποίες το $\mathbb{E}(g)$ δεν υπάρχει.

Έστω $g(z) = e^z$. Για την συγκεκριμένη κατανομή έχουμε

$$\mathbb{E}(g) = \sum_{i \in \mathbb{N}} g(i)\, \mathbb{P}(\{i\}) = \sum_{i=0}^{\infty} e^i e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} =$$

κοινός παράγοντας

$$= e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^i \lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(e\lambda)^i}{i!}$$

Πρέπει να το αθροίσουμε υπολογίσουμε

Υπενθύμιση: $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ (ανάπτυγμα McLaurin της εκθετικής συνάρτησης)

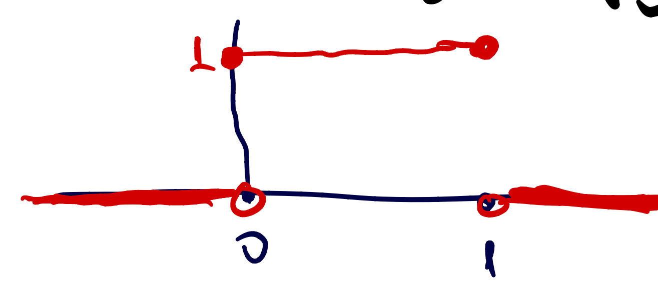
$x = e\lambda$

Εξαιτίας λοιπόν του αναπτύγματος, για $x = e\lambda$ έχουμε ότι

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(e\lambda)^i}{i!} = \exp(e\lambda),$$ οπότε

$$\mathbb{E}(g) = e^{-\lambda}\exp(e\lambda) = \exp(-\lambda + e\lambda) = \exp(\lambda(e-1)).$$

Άρα η g ολοκληρώσιμη ως προς την $Pois(\lambda)$. [Εδώ τελείωσε η προηγ. διαλ.]



5. $\mathbb{P} = Unif[0,1]$ (Τυπική ομοιόμορφη)

- $Supp = [0,1]$
- υπάρχει η συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0,1] \\ 1, & x \in [0,1] \end{cases}$$

* Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι αν η g συνεχής το $\mathbb{E}(g)$ υπάρχει.

$\boxed{\text{νδ } \mathbb{E}(g),\ g = e^z \text{ ως προς την } Unif[\alpha,\beta]}$

Έστω $g(z) = e^z$. Έχουμε ότι

$$\mathbb{E}(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z) f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{0} e^z \cdot 0\,dz + \int_0^1 e^z \cdot 1\,dz + \int_1^{+\infty} e^z \cdot 0\,dz$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dz + \int_0^1 e^z\,dz + \int_1^{+\infty} 0\,dz = \int_0^1 e^z\,dz = e^z\Big|_0^1 = e^1 - e^0$$

$$= e - 1$$

Ολοκληρώματα της σταθερής συνάρτησης στο 0 → ισούνται με 0.

Συνεπώς όπως αναμέναμε η $g=e^z$ είναι ολοκληρώσιμη ως προς την Unif[0,1].

6. $\mathbb{P} = Exp(\lambda)$, $\lambda>0$ (Εκθετική κατανομή με παράμετρο λ)

- supp $= [0, +\infty)$
- Έχει συνάρτηση πυκνότητας την

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Έστω και πάλι $g(z)=e^z$, και έχουμε

$$\mathbb{E}(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z) f(z)\, dz = \int_{-\infty}^{0} e^z \cdot 0\, dz + \int_{0}^{+\infty} e^z \lambda e^{-\lambda z} dz$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\, dz + \lambda \int_{0}^{+\infty} e^{(1-\lambda)z}\, dz = \lambda \int_{0}^{+\infty} e^{(1-\lambda)z}\, dz \quad (*)$$

Ορισμένο ολοκλήρωμα της σταθερής συνάρτησης στο μηδέν $\to$ ισούται με μηδέν

Για το $(*)$ έχουμε τα εξής:

α. Για $\lambda=1$ έχουμε $\lambda \int_{0}^{+\infty} e^{(1-\lambda)z} dz = \lambda \int_{0}^{+\infty} dz =$

$$= \lambda\, z \Big|_{0}^{+\infty} = \lambda \left(\lim_{z \to +\infty} z - 0 \right) = +\infty$$

Οπότε η e^z <u>δεν</u> είναι ολοκληρώσιμη ως προς την $Exp(1)$.

β. Για $\lambda \neq 1$ έχουμε $\lambda \int_0^{+\infty} e^{(1-\lambda)z} dz \underset{u=(1-\lambda)z}{=\!=} (**)$

$du=(1-\lambda)dz \Leftrightarrow \frac{du}{1-\lambda} = dz$

i. όταν $1-\lambda>0 \Leftrightarrow \lambda<1$ βάσει της παραπάνω αντικατάστασης

$$(**) = \lambda \int_0^{+\infty} e^u \frac{du}{1-\lambda} = \frac{\lambda}{1-\lambda} \int_0^{+\infty} e^u du$$

$$= \frac{\lambda}{1-\lambda} \left(e^u \Big|_0^{+\infty} \right) = \frac{\lambda}{1-\lambda} \left(\lim_{u \to +\infty} e^u - e^0 \right) =$$

$$= \frac{\lambda}{1-\lambda} (+\infty - 1) = +\infty$$

Άρα κ' όταν το $\lambda<1$ η $g=e^z$ δεν είναι ολοκληρώσιμη ως προς την $Exp(\lambda)$.

ii. όταν $1-\lambda<0 \Leftrightarrow \lambda>1$

$z \to +\infty \Rightarrow (1-\lambda)z \to -\infty$ αφού $1-\lambda<0$

$$(**) = \lambda \int_0^{-\infty} e^u \frac{du}{1-\lambda} = \frac{\lambda}{1-\lambda} \int_0^{-\infty} e^u du$$

$$= -\frac{\lambda}{\lambda-1} \int_{-\infty}^{0} e^u du = \frac{\lambda}{\lambda-1} \left(e^u \Big|_{-\infty}^{0} \right) =$$

$$= \frac{1}{\lambda-1}\left(e^{0} - \overset{=0}{\lim_{u\to-\infty} e^{u}}\right) = \frac{1}{\lambda-1}(1-0) =$$

$$= \frac{1}{\lambda-1}$$

Συνεπώς η $g=e^{z}$ <u>είναι</u> ολοκληρώσιμη ως προς την $Exp(\lambda)$, όταν $\lambda>1$.

αν και μόνο αν

Ανακεφαλαιώνοντας έχουμε ότι για την $g=e^{z}$ κ' $\mathbb{P}=Exp(\lambda)$

$$\mathbb{E}(g) = \begin{cases} +\infty, & \lambda\leq 1 \\ \frac{1}{1-\lambda}, & \lambda>1 \end{cases}$$

← παράδειγμα μη ύπαρξης της $\mathbb{E}(g)$

Το παράδειγμα κάνει εμφανές προηγούμενο σχόλιο:

η $\mathbb{E}(g)$ εξαρτάται τόσο από την g όσο κ' από την $\mathbb{P}$

Τέλος Διάλεξης 22

7. $\mathbb{P} = N(0,1)$ (Τυπική Κανονική κατανομή)

- $supp=\mathbb{R}$
- έχει συνάρτηση πυκνότητας

την $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$

$\downarrow$

$\varphi(x)$

Έστω και τώρα $g(z)=e^{z}$, και προσπαθούμε να υπολογίσουμε την

$$\mathbb{E}(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z) f(z)\, dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{z - z^2/2}\, dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(z^2 - 2z\right)\right) dz$$

συμπληρώνουμε το τετράγωνο

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(z^2 - 2z \pm 1\right)\right) dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(z^2 - 2z + 1\right) + \frac{1}{2}\right) dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(z^2 - 2z + 1\right)\right) \exp(1/2)\, dz = \frac{\exp(1/2)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(z-1)^2\right) dz$$

$$= \exp(1/2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z-1)^2\right) dz \quad = 1$$

είναι η συνάρτηση πυκνότητας της $N(1,1)$

Υπενθύμιση: η συνάρτηση πυκνότητας της $N(\mu, v)$ είναι

η $\frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(z-\mu)^2}{v}\right)$ οπότε για την $N(1,1)$

έχουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας είναι η $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z-1)^2\right)$

Οπότε το $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z-1)^2\right) dz$ είναι το ολοκλήρωμα σε όλο το $\mathbb{R}$ συνάρτησης πιθανότητας, οπότε αυτό ισούται με 1.

Συνεπώς $\mathbb{E}(g) = \exp(1/2)$.

Η εκθετική συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη ως προς την $N(0,1)$.

[redacted]

Υπενθύμιση: στο τελευταίο μας παράδειγμα είδαμε ότι αν $\mathbb{P}=N(0,1)$ και $g(z)=e^z$ τότε $\mathbb{E}(g)=e^{1/2}$ (Χρησιμοποιήσαμε τεχνική συμπλήρωσης τετραγώνου, όπως κ' το ότι αν η f συνάρτηση πυκνότητας τότε $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz=1$).

Άσκηση: Να βρεθεί η $\mathbb{E}(g)$ όταν $g(z)=e^z$ κ' $\mathbb{P}=N(\mu,\nu)$ για αυθαίρετα $\mu\in\mathbb{R}$ κ' $\nu>0$.

Παρατήρηση: Οι υπολογισμοί είναι δυνατόν να γίνουν περίπλοκοι αφού αφορούν διαδικασίες ολοκλήρωσης.

Γεγονός: Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι το να γνωρίζουμε το $\mathbb{E}(g)$ για δεδομένη $\mathbb{P}$, και κάθε συνάρτηση g, ισοδυναμεί με το να γνωρίζουμε την $\mathbb{P}$ [κ' συνεπώς μπορούμε να χρησιμοποιούμε αυτά τα ολοκληρώματα προκειμένου να βρίσκουμε τις πιθανότητες που αποδίδει η $\mathbb{P}$]. Αυτό μας υποδεικνύει ότι μπορούμε να αντιλαμβανόμαστε κάθε $\mathbb{P}$, όχι μόνο ως διαδικασία απόδοσης πιθανοτήτων σε κομμάτια του $\mathbb{R}$, αλλά γενικότερα ως διαδικασίες ολοκλήρωσης!

Ερώτημα. Βάσει του παραπάνω για δεδομένη $\mathbb{P}$, η $\mathbb{E}(g)$ κάθε σχετικής g μας δίνει πληροφορία για ιδιότητες της κατανομής. Τι είδους πληροφορία παίρνουμε για την

$\mathbb{P}$ όταν ολοκληρώνουμε ως προς αυτή πολυωνυμικές συναρτήσεις της μορφής $g(z)=z^k$, για $k=0,1,2,\dots$;

Τέλος Διάλεξης 23

Παράρτημα 1 - Στη διάλεξη 22 είδαμε επίσης και το:

3. Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n\in\mathbb{N}^*$, $q\in(0,1)$ $[\mathrm{Bin}(n,q)]$

* Υπενθύμιση: Διωνυμικό Ανάπτ. $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$

$$(\alpha+\beta)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\alpha^i\beta^{n-i}$$

- $\mathrm{Supp}=\{0,1,2,\dots,n\}$
- $\mathbb{P}(\{i\})=\binom{n}{i}q^i(1-q)^{n-i}$, $i\in\mathrm{supp}$

$$\binom{n}{i}=\frac{n!}{i!\,(n-i)!}$$

Μας δουλεύει να είναι ολοκληρώσιμη ως προς την $\mathrm{Bin}(n,q)$

Το supp πεπερασμένο $\Rightarrow \mathbb{E}(g)\in\mathbb{R}$ για κάθε g

π.χ. $g(x)=e^x$

$$\mathbb{E}(g)=\sum_{i\in\{0,1,2,\dots,n\}}e^i\binom{n}{i}q^i(1-q)^{n-i}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(eq)^i(1-q)^{n-i}$$

$$\underset{\substack{\Delta.\text{Αν}\\ \alpha=eq,\ \beta=1-q}}{=}(eq+1-q)^n=(q(e-1)+1)^n$$

Διακριτή κατ. $[n=1, \mathrm{Ber}(q), \ q(e-1)+1]$

Παράρτημα 2 – στην διάλεξη 23 είδαμε και το:

Παράδειγμα ολοκλήρωσης

$\mathbb{P} = \mathrm{Unif}[0,1]$

- $\mathrm{supp} = [0,1]$
- $f(z) = \begin{cases} 0, & z \notin [0,1] \\ 1, & z \in [0,1] \end{cases}$

$g(z) = \ln z$

↳ δεν ταιριάζει ακριβώς στον ορισμό που έχουμε δώσει για την ολοκλήρωση επειδή δεν ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$.

Μπορούμε όμως να προσπαθήσουμε να την ολοκληρώσουμε "σύμφωνα" με τον ορισμό, επειδή το στήριγμα της $\mathrm{Unif}[0,1]$ "αποφεύγει" τα $z<0$ για τα οποία η λογαριθμική συνάρτηση δεν ορίζεται.

Έχουμε όμως ότι $0 \in \mathrm{supp}$ κ' $\ln 0 = -\infty \notin \mathbb{R}$. Δημιουργεί αυτό πρόβλημα στην κατασκευή αυτού του ολοκληρώματος; Αλλά $\mathbb{P}(\{0\}) = 0$ για την $\mathrm{Unif}[0,1]$. Μήπως αυτό είναι επαρκές προκειμένου το ολοκλήρωμα που θα σχηματιστεί να είναι πραγματικός; Ας το δούμε:

Σχηματίζουμε λοιπόν το ολοκλήρωμα περιοριζόμενοι στο $[0,+\infty)$ αφού στο $(-\infty,0)$ η $\ln z$ δεν είναι καθώς ορισμένη αλλά και $\mathbb{P}((-\infty,0)) = 0$ για την $\mathrm{Unif}[0,1]$

$$\mathbb{E}(g) = \int_0^{+\infty} g(z) f(z)\, dz = \int_0^1 \ln(z) \cdot 1\, dz + \int_1^{+\infty} \ln(z) \cdot 0\, dz$$

$$= \int_0^1 \ln(z)\, dz + \int_1^{+\infty} 0\, dz = \int_0^1 \ln(z)\, dz$$

ισούται με 0 ως ορισμένο ολοκλήρωμα της σταθερής συνάρτησης στο 0

$$\left[* \quad z' = 1 \right]$$

παραγοντική ολοκλήρωση

$$\left[\int h' g = hg - \int h g' \right]$$

$$= \int_0^1 z' \ln(z)\, dz = z \ln(z) \Big|_0^1 - \int_0^1 \underbrace{z \cdot \frac{1}{z}}_{=1}\, dz$$

$h(z) = z$

$g(z) = \ln(z)$

$g'(z) = \ln'(z) = \frac{1}{z}$

$$= z \ln(z) \Big|_0^1 - \int_0^1 dz$$

$$= 1 \cdot \ln(1) - 0 - z \Big|_0^1 = -(1-0) = -1,$$

καθώς $z \to 0$

Το $z \cdot \ln z$ δημιουργεί απροσδιοριστία αλλά το z συγκλίνει ταχύτερα στο 0 από ότι το $\ln z$ στο $-\infty$. Επομένως ο πρώτος όρος κυριαρχεί

"Μπορούμε να ολοκληρώνουμε κ' "προβληματικές σε κάποια κομμάτια του $\mathbb{R}$" συναρτήσεις, εφόσον οι κατανομές και προς τις οποίες ολοκληρώνουμε θεωρούν αυτά τα κομμάτια αμελητέα, καθώς τότε είναι δυνατόν αυτά να μην επηρεάζουν τις τιμές των ολοκληρωμάτων".