Διαλέξεις 20-21

- Συναρτήσεις πιθανότητας:
  περαιτέρω ιδιότητες και παραδείγματα
- 3η Αναπαράσταση:
  Οι κατανομές πιθανότητας ως διαδικασίες
  ολοκλήρωσης

Υπενθύμιση: Περαιτέρω ιδιότητες συναρτήσεων πυκνότητας:

α. η f όταν υπάρχει χρειάζεται να επιλεγεί ώστε

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

β. $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\, dz = 1$$

[Αν η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τα α,β τότε είναι συνάρτηση πυκνότητας μοναδιαίας κατανομής επί του $\mathbb{R}$]

γ. αν η $\mathbb{P}$ έχει συνάρτηση πυκνότητας την f τότε αν $A \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα: $\mathbb{P}(A) = \int_A f(z)\, dz$

Επίσης αν $x \in \mathbb{R}$, τότε $\mathbb{P}(\{x\}) = 0$.

Συνεχίζουμε:

δ. Έστω $(\alpha, \beta) \subseteq \text{supp}'$ (δηλ. το διάστημα βρίσκεται εξ' ολοκλήρου εκτός του στηρίγματος της $\mathbb{P}$). Επομένως η F σταθερή στο (α,β) και άρα παραγωγίσιμη και συνεπώς

$\frac{dF(x)}{dx} = 0 \quad \forall x \in (\alpha,\beta)$ οπότε $f(x) = 0 \quad \forall x \in (\alpha,\beta)$. Δηλαδή

Εκτός του supp η f θα είναι σταθερή στο 0.

Παραδείγματα.

5. Ομοιόμορφη κατανομή στο $[\alpha,\beta]$ ($Unif[\alpha,\beta]$)

— $supp = [\alpha,\beta]$

— $F(x) = \begin{cases} 0, & x<\alpha \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, & \alpha\leq x<\beta \\ 1, & \beta\leq x \end{cases}$

Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι η f υπάρχει. Μας δίνεται η συνήθης επιλογή της f, η οποία είναι η εξής:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x\notin[\alpha,\beta] \\ \frac{1}{\beta-\alpha}, & x\in[\alpha,\beta] \end{cases}$$

6. Εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda>0$ ($Exp(\lambda)$).

— $supp = [0,+\infty)$

— $F(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-\exp(-\lambda x), & x\geq 0 \end{cases}$

Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι η f υπάρχει. Η συνήθης επιλογή της f για την εν λόγω κατανομή είναι η

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0 \end{cases}.$$

[redacted]

Συνέχεια Παραδειγμάτων:

Παράδειγμα 7. $N(\mu,v)$, $\mu\in\mathbb{R}$, $v>0$

$-\ \mathrm{supp}=\mathbb{R}$

$-\ F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz$, $f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\exp\left(-\frac{(z-\mu)^2}{2v}\right)$

Προφανώς η f υπάρχει και εξ' ορισμού είναι η

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(z-\mu)^2}{v}\right).$$

Για την τυπική κανονική κατανομή ($\mu=0$, $v=1$ – $N(0,1)$) η συνάρτηση πυκνότητας παίρνει την μορφή:

$$\varphi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)$$

$\varphi(-z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(-z)^2\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)=\varphi(z)$ οπότε η φ είναι άρτια συνάρτηση.

Τέλος Διάλεξης 20

Έστω $\alpha\in\mathbb{R}$, $\mathbb{P}([\alpha,+\infty))=\int_{\alpha}^{+\infty}\varphi(z)\,dz=$

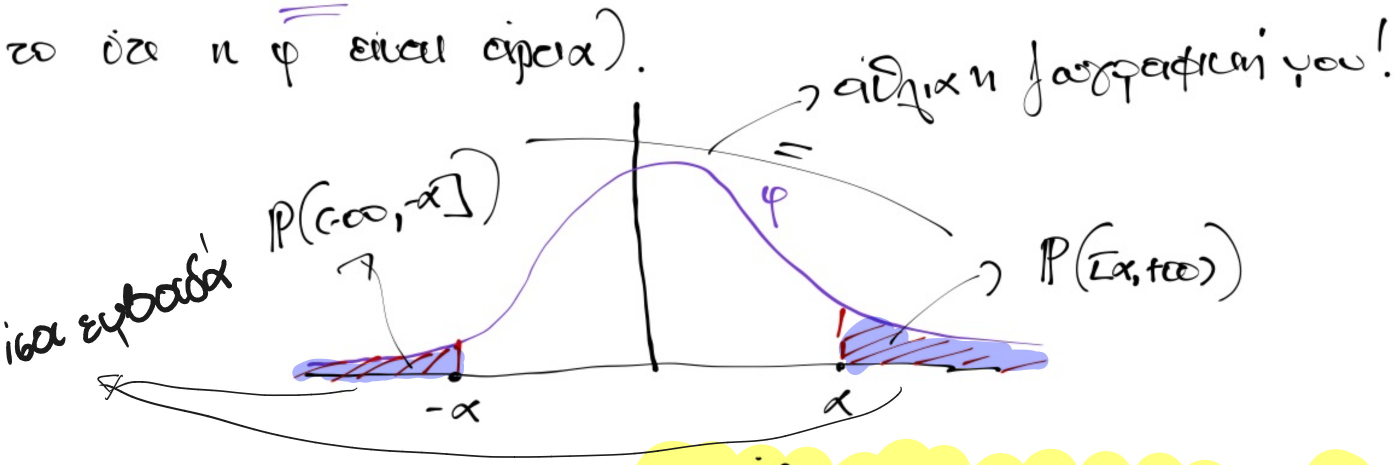
κάνουμε την αντικατάσταση $y=-z \Leftrightarrow z=-y$
$dz=-dy$

$=\int_{-\alpha}^{-\infty}\varphi(-y)(-dy)=-\int_{-\alpha}^{-\infty}\varphi(y)\,dy=\int_{-\infty}^{-\alpha}\varphi(y)\,dy=\mathbb{P}((-\infty,-\alpha])$

↳ αρτιότητα της φ

Οπότε $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ εξαιτίας της αρτιότητας της φ, για την $N(0,1)$

$$\mathbb{P}([\alpha,+\infty)) = \mathbb{P}((-\infty,-\alpha])$$ (συμμετρία που σχετίζεται με το ότι η φ είναι άρτια).



Επομένως το παραπάνω είναι παράδειγμα του πως ιδιότητες της συνάρτησης πυκνότητας (εδώ η αρτιότητα της φ) είναι δυνατόν να αντανακλούν ιδιότητες της κατανομής (εδώ η συμμετρία της $\mathbb{P}$)

Άσκηση. Να δείξετε ότι η ιδιότητα της συμμετρίας ισχύει γενικά για την $N(0,v)$, $v>0$.

Παράδειγμα υπολογισμού πιθανότητας μέσω της συνάρτησης πυκνότητας για την $Exp(\lambda)$.

Έστω ότι για την $Exp(\lambda)$, να βρούμε την $\mathbb{P}((-1,1))$ χρησιμοποιώντας την συνάρτηση πυκνότητας:

$$\mathbb{P}((-1,1)) = \int_{-1}^{1} f(z)\,dz = \int_{-1}^{0} f(z)\,dz + \int_{0}^{1} f(z)\,dz = \int_{-1}^{0} 0\,dz + \int_{0}^{1} \lambda e^{-\lambda z}\,dz$$

0 (ορισμένο ολοκλήρωμα)

$$= \int_{0}^{1} \lambda e^{-\lambda z}\,dz \underset{\substack{du=-\lambda dz \\ \Leftrightarrow\ -du=\lambda dz}}{\overset{u=-\lambda z}{=}} \int_{0}^{-\lambda} e^{u}(-du) = -\int_{0}^{-\lambda} e^{u}\,du = \int_{-\lambda}^{0} e^{u}\,du = e^{u}\Big|_{-\lambda}^{0} = e^{0}-e^{-\lambda} = 1-e^{-\lambda}$$

3. Οι κατανομές πιθανότητας πάνω στους πραγματικούς ως διαδικασίες ολοκλήρωσης.

* Παίρνοντας αφορμή από την συνάρτηση πιθανότητας για την οποία είδαμε ότι μέσω αυτής είναι δυνατόν να υπολογίσουμε πιθανότητες ως ολοκληρώματα, η από την αθροιστική συνάρτηση όπου κάποιοι υπολογισμοί πιθανοτήτων μέσω αυτής μας θύμισαν το Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού, αν $\mathbb{P}$ είναι κατανομή πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κατάλληλη συνάρτηση, έχει νόημα το

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g \, d\mathbb{P} \; ;$$

Το παραπάνω είναι δυνατόν να οριστεί για όποια $\mathbb{P}$ και εφόσον η g έχει την ιδιότητα της τυχαίας μεταβλητής (φροντιστήριο). Για να το ορίσουμε στην πληρότητα του το παραπάνω μας χρειάζονται έννοιες ολοκληρωμάτων που ξεφεύγουν του εύρους του μαθήματος. Θα προσπαθήσουμε να δώσουμε έναν περιορισμένο κ' αναγκαστικά ελλιπή ορισμό του $\int_{-\infty}^{+\infty} g\,d\mathbb{P}$ που θα είναι προσαρμοσμένος στα όσα ξέρουμε.

Ορισμός. Έστω $\mathbb{P}$ είναι κατανομή πιθανότητας στο $\mathbb{R}$, κ' η $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή. Τότε το ολοκλήρωμα της g ως προς την $\mathbb{P}$ (ή η αναμενόμενη τιμή της g ως προς την $\mathbb{P}$) ορίζεται ως εξής:

$$\underline{\mathbb{E}(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} g\,d\mathbb{P}} := \begin{cases} \sum_{i\in \mathrm{supp}} g(i)\,\mathbb{P}(\{i\}), & \mathbb{P} \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(z) f(z)\,dz, & \text{η } f \text{ είναι η συνάρτηση πυκνότητας της } \mathbb{P}. \end{cases}$$

Σχόλια κ' ιδιότητες:

1. Ο ορισμός είναι περιορισμένος. Η $\mathbb{E}(g)$ έχει νόημα όποια κ' αν είναι η $\mathbb{P}$. Λόγω όμως κ' αυτός ο περιορισμένος ορισμός είναι δυνατόν να περιλαμβάνει περιπτώσεις που δεν μας είναι οικείες, π.χ. $\mathbb{P}$ διακριτή με υπεραριθμήσιμο supp οπότε το άθροισμα είναι απειροπληθές ή περιπτώσεις που το $\int_{-\infty}^{+\infty} g(z)f(z)\,dz$ δεν είναι το ολοκλήρωμα Riemann όπως το ξέρουμε από τον λογισμό μας. Τέτοιες περιπτώσεις είτε θα τις αποφεύγουμε, είτε θα τις προσαρμόζ-

δούμε στα όσα γνωρίζουμε.

2. Δεν θα ασχοληθούμε ρητά με το αν η συνάρτηση g έχει την ιδιότητα της τυχαίας μεταβλητής. Όποια g συναντήσουμε παρακάτω θα έχει επιλεγεί ώστε να ικανοποιεί αυτή την ιδιότητα.

3. Η $E(g)$ εξαρτάται τόσο από την g όσο κ' από την $\mathbb{P}$. Ο συμβολισμός $\mathbb{E}(g)$ συσκοτίζει την εξάρτηση από την $\mathbb{P}$. Καλό είναι να το θυμάμαστε.

4. Θα λέμε ότι η $\mathbb{E}(g)$ υπάρχει αν $\mathbb{E}(g) \in \mathbb{R}$. Είναι δυνατόν (θα δούμε σχετικό παράδειγμα) η $\mathbb{E}(g)$ να μην υπάρχει για κάποιες g κ' $\mathbb{P}$ εξαιτίας απειρισμών, απροσδιοριστιών κ.ο.κ. στους υπολογισμούς βάσει του ορισμού.

Στην περίπτωση που η $E(g)$ υπάρχει η g ονομάζεται ολοκληρώσιμη (integrable) ως προς την $\mathbb{P}$. (όταν η $\mathbb{P}$ διακριτή με πεπερασμένο supp τότε η $\mathbb{E}(g)$ υπάρχει $\forall g$ τυχαία μεταβλητή)

5. Έστω ότι η g είναι σταθερή συνάρτηση, δηλ. $g(z)=c \in \mathbb{R}$ $\forall z \in \mathbb{R}$. Έχουμε ότι:

$$\mathbb{E}(g) = \begin{cases} \sum_{i \in supp} g(i)\,\mathbb{P}(\{i\}) & \text{η } \mathbb{P} \text{ διακρ.} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(z) f(z)\,dz & \text{η } f \text{ pdf της } \mathbb{P} \end{cases} = \begin{cases} \sum_{i \in supp} c\,\mathbb{P}(\{i\}), & \mathbb{P} \text{ διακρ} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} c\, f(z)\,dz, & \text{η } f \text{ pdf της } \mathbb{P} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} c \sum_{i \in supp} \mathbb{P}(\{i\}), & \mathbb{P} \text{ διακρ} \\ c \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\, dz, & \text{η } f \text{ pdf της } \mathbb{P} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} c\, \mathbb{P}(supp), & \mathbb{P} \text{ διακρ} \\ c \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,dz, & \text{η } f \text{ pdf της } \mathbb{P} \end{cases} = \begin{cases} c \cdot 1, & \mathbb{P} \text{ διακρ} \\ c \cdot 1, & \text{η } f \text{ pdf της } \mathbb{P} \end{cases}$$

$= c.$

Δηλ. όταν ολοκληρώνουμε για σταθερή συνάρτηση ως προς κατανομή απολαύουμε την τιμή στην οποία είναι σταθερή η συνάρτηση. Επίσης κάθε σταθερή συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη ως προς κάθε $\mathbb{P}$.

6. Έστω g_1, g_2 ολοκληρώσιμες ως προς την $\mathbb{P}$. Έστω επίσης $g_1(z) \leq g_2(z)$ $\forall z \in \mathbb{R}$. Τότε είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι $\mathbb{E}(g_1) \leq \mathbb{E}(g_2)$ (ιδιότητα μονοτονίας της ολοκλήρωσης)

7. Έστω g_1, g_2 ολοκληρώσιμες ως προς την $\mathbb{P}$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. $G(z) := \lambda_1 g_1(z) + \lambda_2 g_2(z) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αποδεικνύεται ότι κ' η G ολοκληρώσιμη ως προς την $\mathbb{P}$ κ' έχουμε

$$\mathbb{E}(G) = \mathbb{E}(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) = \lambda_1 \mathbb{E}(g_1) + \lambda_2 \mathbb{E}(g_2) \quad \text{(γραμμικότητα)}$$

Παραδείγματα:

1. Εκφυλισμένη στο 0

$-\ \text{supp} = \{0\}$ (πεπερ. πλήθος στοιχείων)

$-\ \mathbb{P}(\{0\}) = 1$

Έστω g συνάρτηση όπως παραπάνω. Επειδή supp πεπερασμένο βάσει του σχολίου 4 η $\mathbb{E}(g)$ θα υπάρχει. (καθώς g είναι ολοκληρώσιμη ως προς την συγκεκριμένη $\mathbb{P}$). Θα έχουμε

$$\mathbb{E}(g) = \sum_{i \in \{0\}} g(i)\, \mathbb{P}(\{i\}) = g(0)\, \mathbb{P}(\{0\})$$

$$= g(0) \cdot 1 = g(0).$$

Σημ. Το να ολοκληρώσουμε οποιαδήποτε κατάλληλη συνάρτηση ως προς την εκφυλισμένη κατανομή στο 0 ισοδυναμεί με το να υπολογίσουμε αυτή την συνάρτηση στο 0.

$$g(z) = e^z$$

$$\mathbb{E}(g) = g(0) = e^0 = 1$$

2. $\mathbb{P} = Ber(q)$, $q \in (0,1)$ [Bernoulli με παράμετρο q]

- $supp = \{0,1\}$ → πεπερασμένο άρα όποια g είναι ολοκληρώσιμη ως προς την συγκεκριμένη $\mathbb{P}$.

- $\mathbb{P}(\{0\}) = 1-q$
  $\mathbb{P}(\{1\}) = q$

Έστω $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή. Έχουμε ότι:

$$\mathbb{E}(g) = \sum_{i \in \{0,1\}} g(i)\,\mathbb{P}(\{i\}) = g(0)\,\mathbb{P}(\{0\}) + g(1)\,\mathbb{P}(\{1\})$$

$$= g(0)(1-q) + g(1)q$$ → κυρτός συνδυασμός των $g(0)$ & $g(1)$

Αν π.χ. $g(z) = e^z$, $\mathbb{E}(g) = e^0(1-q) + e^1 q =$
$= 1-q+eq = 1+(e-1)q$.

4. $\mathbb{P} = Poiss(\lambda)$, $\lambda > 0$ (κατανομή Poisson με παράμετρο λ)

- $supp = \mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$ → απειροπληθές
- $\mathbb{P}(\{i\}) = \underline{e^{-\lambda}}\, \lambda^i / i!$, $i \in \mathbb{N}$

είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι υπάρχουν g για τις οποίες το $\mathbb{E}(g)$ δεν υπάρχει.

Έστω $g(z) = e^z$. Για την συγκεκριμένη κατανομή έχουμε

$$\mathbb{E}(g) = \sum_{i \in \mathbb{N}} g(i)\,\mathbb{P}(\{i\}) = \sum_{i=0}^{\infty} e^i e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} =$$

κοινός παράγοντας

$$= e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^i \lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(e\lambda)^i}{i!}$$

Πρέπει να το αθροίσω υπολογίσουμε

Υπενθύμιση: $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ (ανάπτυγμα McLaurin της εκθετικής συνάρτησης) $x = e\lambda$

Εξαιτίας λοιπόν του αναπτύγματος, για $x = e\lambda$ έχουμε ότι

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(e\lambda)^i}{i!} = \exp(e\lambda), \text{ οπότε}$$

$$\mathbb{E}(g) = e^{-\lambda} \exp(e\lambda) = \exp(-\lambda + e\lambda) = \exp(\lambda(e-1)).$$

Άρα η g ολοκληρώσιμη ως προς την Pois(λ).

Τέλος Διάλεξης 21

5. $\mathbb{P} = \mathrm{Unif}[0,1]$ (Τυπική ομοιόμορφη)

- Supp $= [0,1]$
- υπάρχει η συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0,1] \\ 1, & x \in [0,1] \end{cases}$$

* Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι αν η g συνεχής το $\mathbb{E}(g)$ υπάρχει.

Έστω $g(z) = e^z$. Έχουμε ότι

$$\mathbb{E}(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z) f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{0} e^z \cdot 0\,dz + \int_{0}^{1} e^z \cdot 1\,dz + \int_{1}^{+\infty} e^z \cdot 0\,dz$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dz + \int_{0}^{1} e^z\,dz + \int_{1}^{+\infty} 0\,dz = \int_{0}^{1} e^z\,dz = e^z\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e-1$$

Ορισμένα ολοκληρώματα της σταθερής συνάρτησης στο 0 → ισούνται με 0.

Συνεπώς όπως αναμέναμε η $g = e^z$ είναι ολοκληρώσιμη ως προς την $Unif[0,1]$.

6. $\mathbb{P} = Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$ (Εκθετική κατανομή με παράμετρο λ)

– $supp = [0, +\infty)$

– Έχει συνάρτηση πυκνότητας την

$$f(x) = \begin{cases} 0 , & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} , & x \geq 0 \end{cases}$$

Έστω και πάλι $g(z) = e^z$, και έχουμε

$$\mathbb{E}(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z) f(z)\, dz = \int_{-\infty}^{0} e^z \cdot 0\, dz + \int_{0}^{+\infty} e^z \lambda e^{-\lambda z} dz$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\, dz + \lambda \int_{0}^{+\infty} e^{(1-\lambda)z}\, dz = \lambda \int_{0}^{+\infty} e^{(1-\lambda)z} dz \quad (*)$$

Ορισμένο ολοκλήρωμα της σταθερής συνάρτησης στο μηδέν → ισούται με μηδέν

Για το $(*)$ έχουμε τα εξής:

α. Για $\lambda = 1$ έχουμε $\lambda \int_0^{+\infty} e^{(1-\lambda)z} dz = \int_0^{+\infty} dz =$

$$= z \Big|_0^{+\infty} = \lim_{z \to +\infty} z - 0 = +\infty$$

Οπότε η e^z δεν είναι ολοκληρώσιμη ως προς την $Exp(1)$.

β. Για $\lambda \neq 1$ έχουμε

$$\lambda \int_0^{+\infty} e^{(1-\lambda)z} dz \overset{u=(1-\lambda)z}{=\!=\!=} (**)$$

$$du = (1-\lambda)dz \Leftrightarrow \frac{du}{1-\lambda} = dz$$

i. όταν $1-\lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda < 1$ βάσει της παραπάνω αντικατάστασης

$$(**) = \lambda \int_0^{+\infty} e^u \frac{du}{1-\lambda} = \frac{\lambda}{1-\lambda} \int_0^{+\infty} e^u du$$

$$= \frac{\lambda}{1-\lambda} \left(e^u \Big|_0^{+\infty} \right) = \frac{\lambda}{1-\lambda} \left(\lim_{u \to +\infty} e^u - e^0 \right) =$$

$$= \frac{\lambda}{1-\lambda} (+\infty - 1) = +\infty$$

Άρα κ' όταν το $\lambda < 1$ η $g = e^z$ δεν είναι ολοκληρώσιμη ως προς την $Exp(\lambda)$.

ii. όταν $1-\lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda > 1$

$z \to +\infty \Rightarrow (1-\lambda)z \to -\infty$ αφού $1-\lambda<0$

$$(**) = \lambda \int_0^{-\infty} e^u \frac{dz}{1-\lambda} = \frac{\lambda}{1-\lambda} \int_0^{-\infty} e^u du$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda-1} \int_{-\infty}^{0} e^u du = \frac{\lambda}{\lambda-1} \left(e^u \Big|_{-\infty}^{0} \right) =$$

$$= \frac{1}{\lambda-1}\Big(e^{0} - \underbrace{\lim_{u\to-\infty} e^{u}}_{=0}\Big) = \frac{1}{\lambda-1}(1-0) = \frac{1}{\lambda-1}$$

Συνεπώς η $g=e^x$ <u>είναι</u> ολοκληρώσιμη ως προς την $Exp(\lambda)$, όταν $\lambda>1$.

αν και μόνο αν

Ανακεφαλαιώνοντας έχουμε ότι για την $g=e^x$ κ' $\mathbb{P}=Exp(\lambda)$

$$\mathbb{E}(g) = \begin{cases} +\infty, & \lambda\le 1 \\ \frac{1}{1-\lambda}, & \lambda>1 \end{cases}$$

Το παράδειγμα κάνει εμφανές προηγούμενο σχόλιο:

η $\mathbb{E}(g)$ εξαρτάται τόσο από την g όσο κ' από την $\mathbb{P}$.

7. $\mathbb{P} = N(0,1)$ (Τυπική Κανονική κατανομή)

- supp $\mathbb{R}$
- έχει συνάρτηση πυκνότητας την $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$

Έστω και τώρα $g(z)=e^{z}$, και προσπαθούμε να υπολογίσουμε την

$$\mathbb{E}(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z) f(z)\, dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{z-z^2/2}\, dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(z^2-2z\right)\right) dz$$

συμπληρώνουμε το τετράγωνο

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(z^2-2z\pm 1\right)\right) dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(z^2-2z+1\right)+\frac{1}{2}\right) dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(z^2-2z+1\right)\right) \exp\left(1/2\right) dz = \frac{\exp(1/2)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(z-1)^2\right) dz$$

$$= \exp\left(1/2\right) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z-1)^2\right) dz}_{=1}$$

είναι η συνάρτηση πυκνότητας της $N(1,1)$

Υπενθύμιση: η συνάρτηση πυκνότητας της $N(\mu,v)$ είναι

η $\frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(z-\mu)^2}{v}\right)$ οπότε για την $N(1,1)$

έχουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας είναι η $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z-1)^2\right)$

Οπότε το $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z-1)^2\right)dz$ είναι το ολοκλήρωμα σε όλο το $\mathbb{R}$ συνάρτησης πιθανότητας, οπότε αυτό ισούται με 1.

Συνεπώς $\mathbb{E}(g) = \exp(1/2)$.

Η εκθετική συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη ως προς την $N(0,1)$.