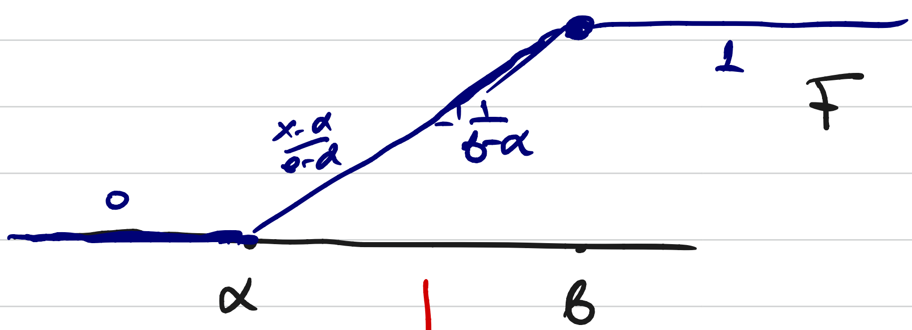
Διαλέξεις 17-18

* Περαιτέρω Παραδείγματα
* Συνάρτηση Πυκνότητας

Υπενθύμιση: Μεθοδολογία Εξέτασης Παραδειγμάτων

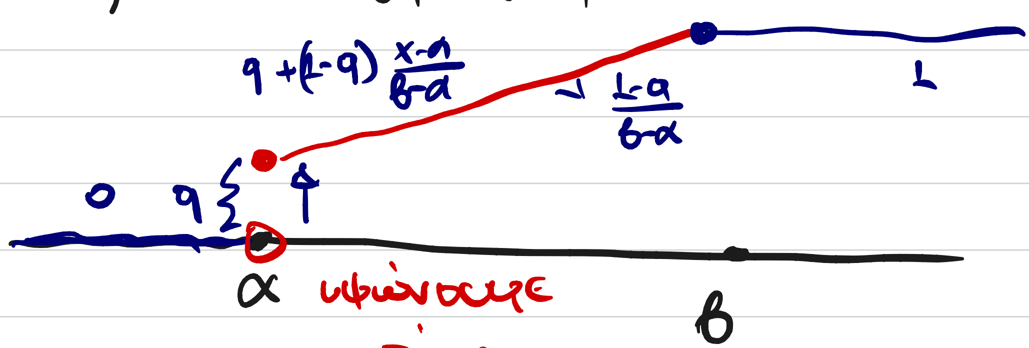
1. Δίνεται η F
2. Εξετάζεται το αν η F είναι καλώς ορισμένη (δηλ. ικανοποιεί τις α,β,γ)
3. Εφόσον είναι, το Θεώρημα χαρακτηρισμού ⇒ ότι η F αναπαριστά μοναδική P
4. Βρίσκουμε μέσω της F ιδιότητες της P κ' (συνήθως ενδεικτικά) πιθανότητες που η P αποδίδει

→ Εξετάσαμε το παράδειγμα (5) της ομοιόμορφης κατανομής $Unif[\alpha,\beta]$



↓

Αποκτούμε ένα ενδιαφέρον παράδειγμα τροποποιώντας το παραπάνω γράφημα:



υψώνουμε κατά q το 2ο τμήμα της παραπάνω F στο α δημιουργώντας ασυνέχεια ύψους q ⇒

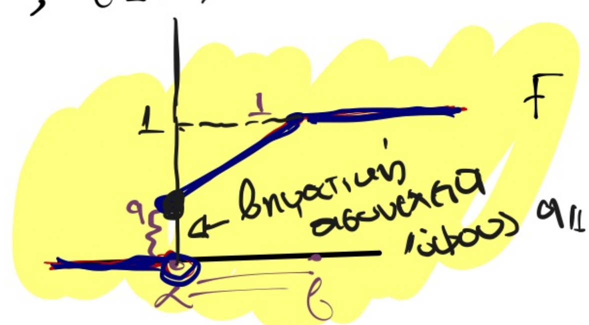
* Θα αποκτήσουμε παράδειγμα κατανομής με supp που έχει μορφή διαστήματος (συνεχής κατανομή) αλλά με αθροιστική που έχει ασυνέχεια!

5'. Έστω όπως κ' προηγουμένως το $[\alpha,\beta]$, κ' $q\in(0,1)$ με

- $\text{supp}=[\alpha,\beta]$
- $$F(x)=\begin{cases}0, & x<\alpha\\ q+\left[(1-q)\dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right], & \alpha\le x<\beta\\ 1, & \beta\le x\end{cases}$$

ο κάθετος άξονας έχει τοποθετηθεί στο α.

Είναι η F καλώς ορισμένη;



* Από το γράφημα φαίνεται ότι η F ικανοποιεί τις τρεις χαρακτηριστικές ιδιότητες. Είναι προφανώς αύξουσα κ' έχουμε ότι $\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$, $\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$, είναι παντού συνεχής εκτός του α

και στο α έχουμε $\lim_{x \to \alpha^+} F(x) = \lim_{x \to \alpha} \left(q + (1-q)\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right) =$

$$= q + (1-q)\frac{1}{\beta-\alpha} \lim_{x \to \alpha} (x-\alpha) = q + (1-q)\frac{1}{\beta-\alpha} \cdot (\alpha-\alpha)$$

$= q = F(\alpha)$ επομένως είναι από δεξιά συνεχής στο α, οπότε είναι από δεξιά συνεχής παντού.

- Επομένως η F είναι καλώς ορισμένη αθροιστική κ άρα αναπαριστά μοναδική κατανομή $\mathbb{P}$.
- Η $\mathbb{P}$ έχει ως στήριγμα διάστημα (το $[\alpha,\beta]$) συνεπώς είναι συνεχής. Παρόλαυτα η αθροιστική της συνάρτηση είναι ασυνεχής.
- Για την συγκεκριμένη $\mathbb{P}$ έχουμε ότι $\mathbb{P}(\{\alpha\}) = F(\alpha) - \lim_{x \to \alpha^-} F(x)$

$$= q + (1-q)\underbrace{\frac{\alpha-\alpha}{\beta-\alpha}}_{=0} - \lim_{x \to \alpha^-} 0 = q, \text{ ενώ } \mathbb{P}(\{x\}) = 0 \quad \forall x \neq \alpha$$

επειδή η F είναι συνεχής σε κάθε τέτοιο x.

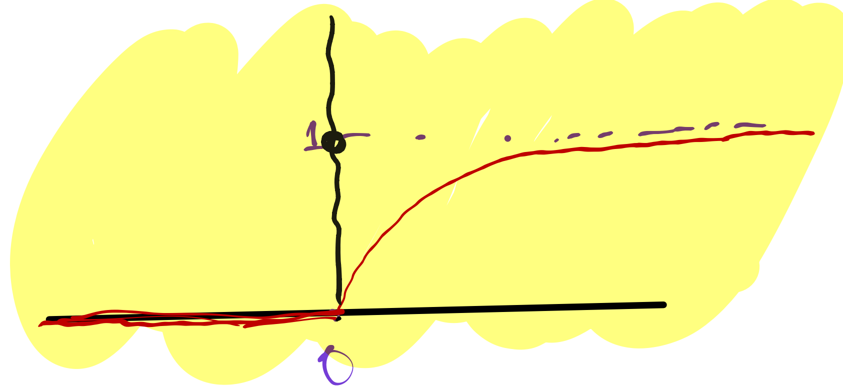
Άσκηση. Προσπαθήστε να κατασκευάσετε κατανομή π.π. με στήριγμα το $[\alpha,\beta]$ για την οποία όμως η αθροιστική να είναι ασυνεχής στα α, β.

6. Εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda > 0$ (Exponential Distribution, $Exp(\lambda)$).

διάστημα με μη πεπερασμένο μήκος

- $supp = [0, +\infty) = \mathbb{R}^+$

$$- F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & 0 \leq x \end{cases}$$



* Προφανώς από το γράφημα η F είναι αύξουσα, είναι παντού συνεχής (συνεχής είναι κ' παντού από δεξιά συνεχής) ενώ έχουμε $\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} 0 = 0$, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} (1-e^{-\lambda x})$

$$= 1 - \lim_{x\to+\infty} e^{-\lambda x} \overset{\lambda>0}{=} 1 - e^{-\infty} = 1 - 0 = 1.$$

— Επομένως η F καλώς ορισμένη αθροιστική, επομένως αντιστοιχεί μοναδική $\mathbb{P}$ που ονομάζουμε $Exp(\lambda)$.

— Αφού $supp = [0,+\infty)$ (δηλ. είναι διάστημα), η $Exp(\lambda)$ είναι συνεχής.

— Η F είναι παντού συνεχής, επομένως $\mathbb{P}(\{x\}) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

— Ενδεικτικά έχουμε $\mathbb{P}([0,1]) = \mathbb{P}((0,1)) = \mathbb{P}([0,1)) =$
$= \mathbb{P}((0,1])$ αφού η F συνεχής στα $0,1$, και υπολογίζοντας έχουμε $\mathbb{P}([0,1]) = F(1) - F(0) = 1 - e^{-\lambda \cdot 1} - (1 - e^{-\lambda \cdot 0})$

$$= 1 - e^{-\lambda} - (1 - e^{0}) = 1 - e^{-\lambda} - (1-1) = 1 - e^{-\lambda}$$

— Για κάθε διαφορετική τιμή του λ έχουμε μια διαφορετική εκθετική κατανομή αφού έχουμε μια διαφορετική F. Οπότε έχουμε τόσες εκθετικές κατανομές όσες κ' οι διαφορετικές τιμές που μπορεί να πάρει το λ. Συνεπώς στα παραπάνω εξετάζουμε επί της ουσίας την οικογένεια των εκθετικών κατανομών.

Μάλιστα ως προς το τελευταίο παρατηρούμε το εξής: Πως αλλάζει η $\mathbb{P}([0,1])$ όταν αλλάζει το λ; Έχουμε ότι $\mathbb{P}([0,1]) = 1-e^{-\lambda}$ που είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του λ και

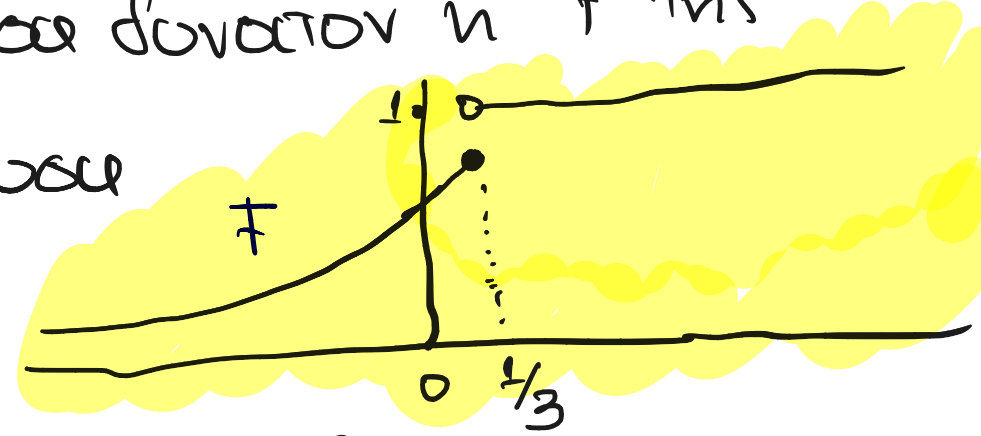
$$\frac{d\mathbb{P}([0,1])}{d\lambda} = \frac{d(1-e^{-\lambda})}{d\lambda} = -\frac{de^{-\lambda}}{d\lambda} = -\frac{de^{-\lambda}}{d(-\lambda)}\,\frac{d(-\lambda)}{d\lambda} =$$

$$= -e^{-\lambda}(-1) = e^{-\lambda} > 0 \quad \forall \lambda > 0.$$

Επομένως για $0<\lambda_1<\lambda_2$ η $Exp(\lambda_2)$ αποδίδει μεγαλύτερη πιθανότητα στο $[0,1]$ από την πιθανότητα που αποδίδει στο ίδιο διάστημα η $Exp(\lambda_1)$.

[Δηλ. η $\mathbb{P}([0,1])$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του λ.]

Αντιπαράδειγμα 2: Είναι δυνατόν η F της οποίας το γράφημα είναι



να είναι αθροιστική κάποιας $\mathbb{P}$;

Όχι! Είναι προφανές ότι η F δεν είναι από δεξιά συνεχής στο $1/3$ - είναι από αριστερά συνεχής.

[redacted]

Παράδειγμα 7. Κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu \in \mathbb{R}$ (μέσος) και $v>0$ (διακύμανση) (Normal or Gaussian distribution) – $N(\mu, v)$

– $supp = \mathbb{R}$ (η πρώτη από αυτές που έχουμε δει που στηρίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$)

– $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz$ όπου $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με (*) → καταχρηστικό

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{(z-\mu)^2}{2v}\right)}$$

(η αθροιστική έχει την μορφή ορισμένου ολοκληρώματος ως προς την f)

Τέλος Διάλεξης 17

– Καταρχάς επειδή το ολοκλήρωμα στο (*) είναι καταχρηστικό θα πρέπει να εξασφαλίσουμε $\forall x \in \mathbb{R}$ $\int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz \in \mathbb{R}$ (κ' δεν είναι π.χ. κάποια απροσδιοριστία ή κάποιο άπειρο). Έτσι θα εξασφαλίσουμε ότι η F παραπάνω είναι συνάρτηση $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

– Παρατηρούμε ότι $f(z)>0$, επομένως το $\int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz$ θα υπάρχει ως πραγματικός αριθμός αν υπάρχει το $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,dz$.

Έχουμε
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{(z-\mu)^2}{2v}\right) dz \quad (**)$$

$\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ $\quad \to y$ $\quad dz \to \sqrt{2v}\,dy$

Αντικατάσταση: $y = (z-\mu)/\sqrt{2v}$

$\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{2v}}\,dz \to dy$ $\qquad \left(\frac{z-\mu}{\sqrt{2v}}\right)^2 \to y^2$

(εξωγενώς)

Μας δίνεται το ολοκλήρωμα Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-y^2)\,dy = \sqrt{\pi}$

Θέτουμε $y = \frac{z-\mu}{\sqrt{2v}}$, $dy = \frac{1}{\sqrt{2v}}\,dz$, επομένως στο

(**) έχουμε $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-y^2)\,dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-y^2)\,dy}_{=\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = 1$

Όταν $z \to -\infty$, $y = \frac{z-\mu}{\sqrt{2v}} \to -\infty$

$z \to +\infty$, $y = \frac{z-\mu}{\sqrt{2v}} \to +\infty$ $\quad \sqrt{2v} > 0$

Επομένως $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,dz \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ (επειδή $f > 0$)

Επομένως η F είναι πραγματική συνάρτηση $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Είναι όμως αθροιστική συνάρτηση;

Παρατηρούμε: * η F παραγωγίσιμη $\forall x \in \mathbb{R}$ αφού

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d\int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz}{dx} = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2v}}$$

οπότε είναι συνεχής.

* η F είναι γνησίως αύξουσα αφού

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Επομένως η F είναι συνεχής (επομένως κ' από δεξιά συνεχής) κ' είναι κ' γνησίως αύξουσα (άρα αύξουσα)

Συνεπώς οι ιδιότητες (α) και (γ) ικανοποιούνται.

Τι συμβαίνει με την (β);

Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,dz = 1$

από τον παραπάνω υπολογισμό.

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty}\int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz = \dots = 0.$$

Είναι δυνατόν να αποδειχθεί (αν θέλετε κάντε το ως άσκηση)

[Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz = \lim\limits_{x\to-\infty}\int_{x}^{x} f(z)\,dz = \lim\limits_{x\to-\infty} 0 = 0$;]

Επομένως ικανοποιείται και η (β). Άρα σύμφωνα η F είναι καλώς ορισμένη αθροιστική συνάρτηση που βάσει του θεωρήματος χαρακτηρισμού θα αντιστοιχεί μοναδική $\mathbb{P}$ στο $\mathbb{R}$, την $N(\mu,v)$.

- Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι η F μπορεί να εκφρασθεί μόνο με μορφή ολοκληρώματος.
- Η $N(\mu,v)$ είναι συνεχής αφού το στήριγμά της είναι διάστημα ($supp = \mathbb{R}$)
- Η αθροιστική της είναι συνεχής οπότε η $\mathbb{P}(\{x\})=0$ $\forall x\in\mathbb{R}$.
- $\underbrace{\mathbb{P}([\alpha,\beta]) = \mathbb{P}((\alpha,\beta)) = \mathbb{P}([\alpha,\beta)) = \mathbb{P}((\alpha,\beta])}_{\text{συνέχεια της } F} =$

$$= F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f(z)\,dz - \int_{-\infty}^{a} f(z)\,dz = \int_{a}^{b} f(z)\,dz =$$

Εδώ η ισχύς του ΘΘΛ 4- είναι προφανής

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \int_{a}^{b} \exp\left(-\frac{(z-\mu)^2}{2v}\right) dz$$ επομένως

για την $N(\mu, v)$ οι πιθανότητες που αποδίδονται σε διαστήματα πεπερασμένου μήκους προκύπτουν ως ολοκληρώματα σε αυτά της f.

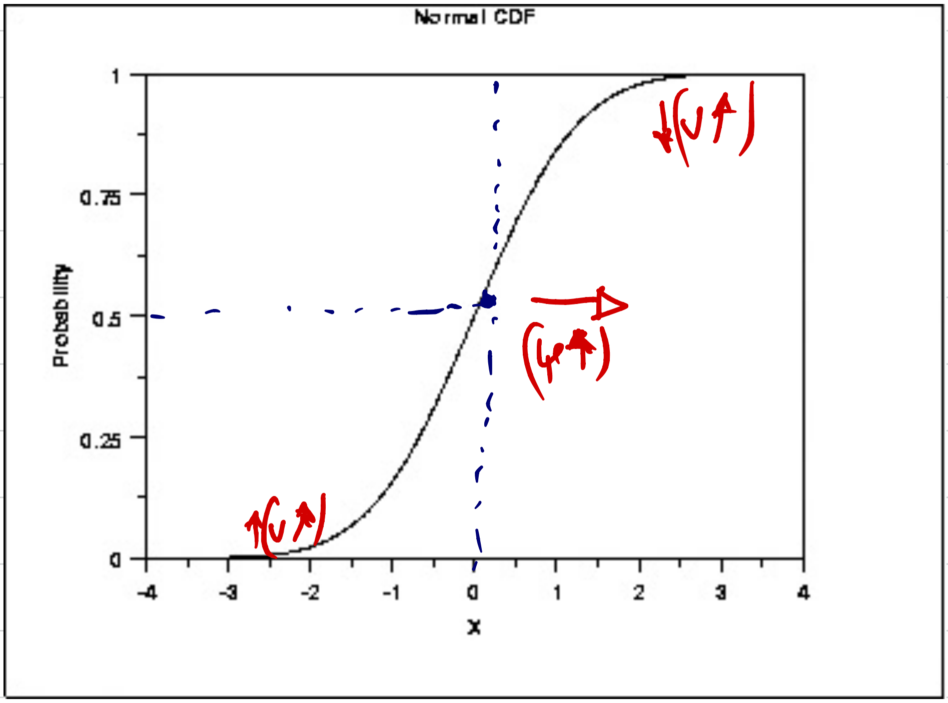
— Επειδή η F μέσω της f εξαρτάται μονοσήμαντα από το $\binom{\mu}{v}$ σε κάθε τιμή του $\binom{\mu}{v}$ αντιστοιχεί κ μία και μοναδική $N(\mu, v)$. Συνεπώς στα παραπάνω ορίσαμε την οικογένεια των κανονικών κατανομών. Ιδιαίτερο παράδειγμα αυτής της οικογένειας είναι η τυπική κανονική κατανομή (Standard Normal) που προκύπτει για $\mu = 0$ κ' $v = 1$ $N(0,1)$. Συνήθως για αυτή έχουμε τους συμβολισμούς:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(z)\,dz, \quad \varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

□

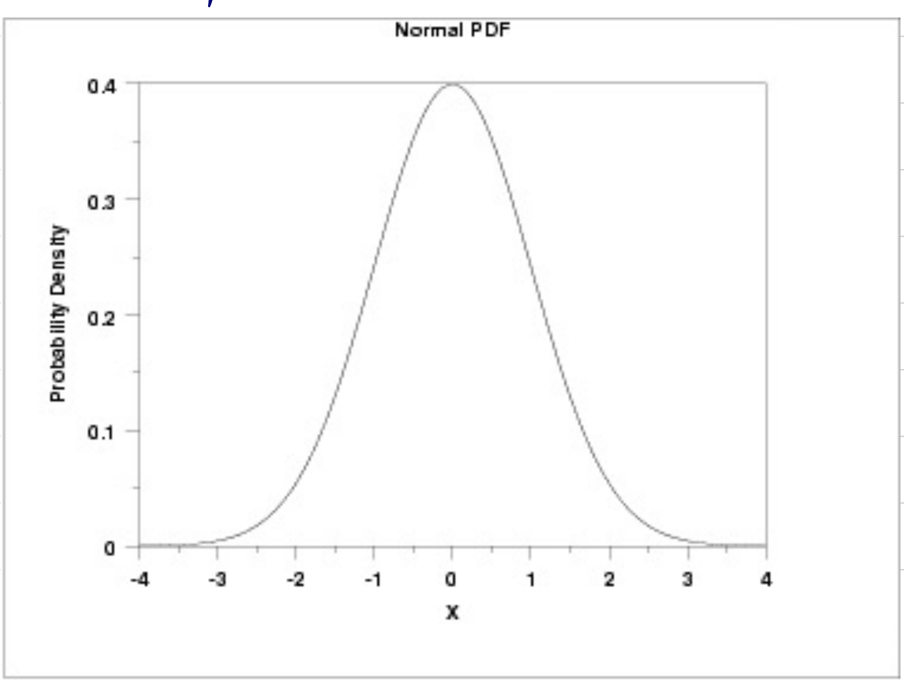
Σε αυτή την παράγραφο είδαμε ότι η αθροιστική συνάρτηση υπάρχει και είναι μοναδική για κάθε κατανομή πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ και την αναπαριστά.

Η Φ έχει την μορφή σιγμοειδούς καμπύλης



Ενώ γενικά η F προκύπτει από την Φ με μετατοπίσεις (ως προς μ) και πλατύνσεις (ως προς ν)

Η φ έχει την μορφή κωδωνοειδούς καμπύλης



B. Συνάρτηση Πυκνότητας (Density function).

Στο παράδειγμα της $N(\mu,v)$ είδαμε ότι η αθροιστική έχει την μορφή ορισμένου ολοκληρώματος κάποιας άλλης συνάρτησης. Γιατί μπορεί να είναι χρήσιμο κάτι τέτοιο;

Τουλάχιστον για δύο λόγους:

- Επιβοηθητικό στο να αντιληφθούμε τις κατανομές ως διαδικασίες ολοκλήρωσης.
- Σχετίζεται με αυτό που ονομάζεται συνάρτηση πιθανοφάνειας στην στατιστική επαγωγή.

Ορισμός. Έστω $\mathbb{P}$ κατανομή στο $\mathbb{R}$ και F η αθροιστική της. Αν υπάρχει $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε να έχουμε ότι

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz, \quad \forall x\in\mathbb{R},$$

τότε η f ονομάζεται συνάρτηση πυκνότητας της $\mathbb{P}$ (probability density function-pdf).

Τέλος Διάλεξης 18

Πότε υπάρχει η συνάρτηση πυκνότητας;

Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι αναγκαία και ικανή συνθήκη για να υπάρχει η f, η F να ικανοποιεί κάποια ιδιότητα συνέχειας που είναι ισχυρότερη της συνηθισμένης (ονομάζεται απόλυτη συνέχεια - absolute continuity και είναι εκτός του εύρους του μαθήματος)

Έτσι λοιπόν εφόσον η IP έχει F που δεν είναι καν συνεχής τότε δεν μπορεί να έχει συνάρτηση πυκνότητας.

Π.χ. οι διακριτές κατανομές ή η κατανομή του παραδείγματος 5' δεν έχουν συνάρτηση πυκνότητας αφού σε αυτές η F είναι ασυνεχής.

Συνεπώς η συνάρτηση πυκνότητας δεν υπάρχει πάντοτε. Υπάρχουν όπως βλέπουμε περιπτώσεις κατανομών που δεν έχουν συνάρτηση πυκνότητας

[redacted]

Υπενθύμιση:

* αν $\mathbb{P}$ κατανομή πιθανότητας με αθροιστική F κ' υπάρχει $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\forall x\in\mathbb{R}$ $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(z)dz$ τότε η f ονομάζεται συνάρτηση πυκνότητας της $\mathbb{P}$.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Τυπικά αυτό μη και για να κατοχυρώσουμε τον ορισμό της f μας χρειάζεται ένας τύπος ολοκληρώματος που διαφέρει από το ολοκλήρωμα Riemann. Δεν ασχολούμαστε με τέτοιες λεπτομέρειες. Ότι συναντήσουμε θα αφορά σε ολοκληρώματα όπως τα ξέρουμε.

* Ύπαρξη: Δεν έχει κάθε $\mathbb{P}$ συνάρτηση πυκνότητας. Π.χ. οι διακριτές κατανομές δεν έχουν αφού οι αθροιστικές τους δεν είναι καν συνεχείς.

Συνέχεια:

Μοναδικότητα: Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι υπάρχει η f η F είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x\in\mathbb{R}$ εκτός ενδεχομένως από μικρού πλήθους σημεία. Επίσης στα σημεία που είναι παραγωγίσιμη η F έχουμε ότι η $f=\frac{dF}{dx}$. Στα σημεία μη παραγωγισιμότητας της F η f είναι δυνατόν να παίρνει αυθαίρετα τιμές. Οπότε είναι δυνατόν να μην είναι μοναδική. Το παραπάνω μας λέει και το πως να υπολογίζουμε την f όταν γνωρίζουμε ότι υπάρχει. Μέσω παραγώγισης στα σημεία παραγωγισιμότητας της F, και δίνοντας αυθαίρετα τιμές στα σημεία μη παραγωγισιμότητας. (Στα παραδείγματα που θα δούμε παρακάτω θα μας δίνονται συγκεκριμένες ειδοχές της f στις οποίες θα συμφωνούμε, άρα.)

Περαιτέρω Ιδιότητες: (έστω λοιπόν ότι η f υπάρχει)

α. Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι η f μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε $f(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

β. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz = \lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{x} f(z)dz = \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1.$

* Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι έχουμε μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τα α, β, τότε η f είναι συνάρτηση πυκνότητας μοναδικής κατανομής P.

Άσκηση: Έστω η $f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0,1] \\ ce^x, & x \in [0,1] \end{cases}$ όπου c σταθερά.

Να προσδιοριστεί, αν υπάρχει, τιμή της c για την οποία η f είναι συνάρτηση πυκνότητας για κάποια P.

Βάσει το (*), προκειμένου η f να είναι συνάρτηση πυκνότητας αρκεί να υπάρχει τιμή για το c ώστε να ικανοποιούνται τα α, β. Για να ικανοποιείται το α, αρκεί $c \geq 0$. Για να ικανοποιείται το β θα πρέπει να υπάρχει c τέτοιο ώστε

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,dz = 1$. Έχουμε $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{0} f(z)\,dz + \int_{0}^{1} f(z)\,dz$

$$+\int_{1}^{+\infty} f(z)\,dz = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0\,dz}_{0} + \int_{0}^{1} ce^{z}\,dz + \underbrace{\int_{1}^{+\infty} 0\,dz}_{0} = c\int_{0}^{1} e^{z}\,dz = c\,e^{x}\Big|_{0}^{1}$$

$$= c\left[e^{1}-e^{0}\right] = c(e-1)$$

ορισμένα ολοκληρώματα

Συνεπώς για να ισχύει η β θα πρέπει $c(e-1)=1 \Leftrightarrow$

$$c = \frac{1}{e-1} > 0.$$

Για να ισχύουν οι α και β ταυτόχρονα θα πρέπει $c = \dfrac{1}{e-1}$.

Επομένως η $f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0,1] \\ \dfrac{1}{e-1}e^{x}, & x \in [0,1] \end{cases}$ θα είναι συνάρτηση πυκνότητας κάποιας $\mathbb{P}$. □

γ. Επειδή μέσω της f και ολοκλήρωσης μπορούμε να βρίσκουμε την F και επειδή μέσω της F μπορούμε να βρίσκουμε τις πιθανότητες που αποδίδει η $\mathbb{P}$, έχουμε ότι το να γνωρίζουμε την f ισοδυναμεί με το να γνωρίζουμε την $\mathbb{P}$. (Οπότε και μπορούμε να χρησιμοποιούμε την f για να βρίσκουμε τις πιθανότητες που η $\mathbb{P}$ αποδίδει).

Π.χ. αν $\alpha<\beta$, $\mathbb{P}((\alpha,\beta)) \overset{*}{=} \mathbb{P}((\alpha,\beta]) \overset{*}{=} \mathbb{P}([\alpha,\beta)) \overset{*}{=}$

$$\overset{*}{=} \mathbb{P}([\alpha,\beta]) = \ldots$$

Οι ισότητες * προκύπτουν από το ότι: η f υπάρχει $\Rightarrow$ η F είναι αναγκαστικά συνεχής $\Rightarrow$ η F συνεχής στα α, β.

$$\ldots = \underline{\underline{F(\beta) - F(\alpha)}} = \int_{-\infty}^{\beta} f(z)\,dz - \int_{-\infty}^{\alpha} f(z)\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z)\,dz.$$

Π.χ. $\mathbb{P}\big((-\infty,\alpha)\big) = \mathbb{P}\big((-\infty,\alpha]\big) = F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} f(z)\,dz.$

προκύπτει όπως παραπάνω

Π.χ. $\mathbb{P}\big([\alpha,+\infty)\big) = \mathbb{P}\big((\alpha,+\infty)\big) = 1 - F(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,dz - \int_{-\infty}^{\alpha} f(z)\,dz$

προκύπτει όπως παραπάνω

από την α. από τον ορισμό της f

$$= \int_{\alpha}^{+\infty} f(z)\,dz.$$

Δηλαδή σε αυτές περιπτώσεις ολοκληρώνουμε την συνάρτηση πυκνότητας στο διάστημα την πιθανότητα του οποίου μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε.

Π.χ. $\mathbb{P}(\{\alpha\}) = 0$ επειδή η f υπάρχει $\Rightarrow$ F συνεχής $\Rightarrow$ F συνεχής στο α

δ. Έστω $(\alpha,\beta) \subseteq supp'$ (δηλ. το διάστημα βρίσκεται εκτός του στηρίγματος της $\mathbb{P}$). Επομένως η F σταθερή στο (α,β) και άρα παραγωγίσιμη και συνεπώς $\frac{dF(x)}{dx} = 0$ $\forall x \in (\alpha,\beta)$ οπότε $f(x) = 0$ $\forall x \in (\alpha,\beta)$. Δηλαδή

Εκτός του supp η f θα είναι σταθερή στο 0.

Παραδείγματα.

5. Ομοιόμορφη κατανομή στο $[\alpha,\beta]$ $(Unif[\alpha,\beta])$

$$- \ supp = [\alpha,\beta]$$

$$- \ F(x) = \begin{cases} 0 , & x<\alpha \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} , & \alpha \le x < \beta \\ 1 , & \beta \le x \end{cases}$$

Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι η f υπάρχει. Μας δίνεται η συνήθης επιλογή της f, η οποία είναι η εξής:

$$f(x) = \begin{cases} 0 , & x \notin [\alpha,\beta] \\ \frac{1}{\beta-\alpha} , & x \in [\alpha,\beta] \end{cases}$$

6. Εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda>0$ $(Exp(\lambda))$.

$$- supp = [0,+\infty)$$

$$- \ F(x) = \begin{cases} 0 , & x<0 \\ 1-\exp(-\lambda x) , & x \ge 0 \end{cases}$$

Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι η f υπάρχει. Η συνήθης επιλογή της f για την εν λόγω κατανομή είναι η

$$f(x) = \begin{cases} 0 , & x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x} , & x \ge 0 . \end{cases}$$