Διαλέξεις 11-12

* Συνέχεια παραδειγμάτων διακριτών κατανομών
* Ταξινόμηση
* Αναπαραστάσεις: Αθροιστική συνάρτη-
ση

Μεθοδολογία Εξέτασης Παραδειγμάτων Διακριτών Κατανομών

① Ορισμός
- α. supp
- β. Πιθανότητα που αποδίδεται σε κάθε στοιχείο του supp
  $P(\{i\})$, $\forall i \in supp$

② Έλεγχος Καλώς Ορισμένου

"συνήθως" επαληθεύονται ζωερά *

- α. Είναι το supp διακριτό;
- β. Ισχύει ότι $P(\{i\}) > 0$ $\forall i \in supp$;
- γ. Ισχύει ότι $P(supp) = 1$

* Σε κάποιες περιπτώσεις το γ. δεν είναι τετριμμένο

③ Εύρεση του $P(A)$ για $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$
(χρήση της θεωρίας μας για τις διακριτές)

Π.χ. Διωνυμική κατανομή $Bin(n, q)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $q \in (0,1)$

α. $supp = \{0, 1, \ldots, n\}$, β. $P(\{i\}) = \binom{n}{i} q^i (1-q)^{n-i}$, $i \in supp$

[redacted]

π.χ. Έστω ότι $n=2$, $\underline{Bin(2,q)}$

$$supp = \{0,1,2\}$$

$$P(\{i\}) = \binom{2}{i} q^i (1-q)^{2-i}$$

πεπερ. συν.

$A=(0,1)$, $P((0,1)) = P((0,1)\cap supp) = P((0,1)\cap\{0,1,2\})$

διάστημα → ξένα μεταξύ τους

$= P(\emptyset) = 0$

$A=[0,1]$, $P([0,1]) = P([0,1]\cap supp) = P([0,1]\cap\{0,1,2\})$

$= P(\{0,1\}) \underset{\text{προσθ.}}{=} P(\{0\}) + P(\{1\}) =$

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

$= \binom{2}{0} q^0 (1-q)^{2-0} + \binom{2}{1} q^1 (1-q)^{2-1}$

$2! = 2$

$= \frac{2!}{0!(2-0)!}(1-q)^2 + \frac{2!}{1!(2-1)!} q(1-q)$

$\frac{2!}{2!} = 1$

$= (1-q)^2 + 2q(1-q) = (1-q)[1-q+2q]$

$= (1-q)(1+q)$

Σύνολο των φυσικών

$A=\mathbb{Z}$, $P(\mathbb{Z}) = P(\mathbb{Z}\cap supp) = P(\mathbb{Z}\cap\{0,1,2\})$

$$P(\mathbb{R}) = 1$$

$\mathbb{Q}\supseteq\mathbb{Z}$

άρα το $\mathbb{Z}$ σύνολο μοναδιαίας π.π. για την $Bin(2,q)$

$= P(\{0,1,2\}) = P(supp) = 1$.

▸ Οι πιθανότητες εξαρτώνται από το $n(=2)$ κ' το q. Γιατί;

Άσκηση. Επαναλάβετε τα παραπάνω για την περίπτωση $n=3$, $q=1/4$ $\left(Bin(3, 1/4)\right)$.

Παρατηρήσεις: 1. Η $Bin(n,q)$ εξαρτάται από το διάνυσμα των παραμέτρων $\binom{n}{q}$. Για διαφορετικές τιμές αυτού του διανύσματος παίρνουμε για διαφορετική διωνυμική κατανομή. Συνεπώς υπάρχουν τόσες διωνυμικές κατανομές όσες κ' οι διαφορετικές τιμές τις οποίες επιτρέπεται να λάβει το $\binom{n}{q}$. Άρα το παραπάνω περιγράφει επί της ουσίας την οικογένεια από διωνυμικές κατανομές.

Αφού π.χ. αν $\binom{n}{q} \neq \binom{n^*}{q^*}$

$$\mathbb{P}(\{0\}) = \binom{n}{0} q^0 (n-q)^n = (n-q)^n \neq (n^*-q^*)^{n^*} = \binom{n^*}{0} q^{*0} (n^*-q^*)^{n^*-0} = \mathbb{P}(\{0\})$$

$\Downarrow$ $n, n^* \in \mathbb{N}^*$, $q, q^* \in (0,1)$

$$Bin\binom{n}{q} \neq Bin\binom{n^*}{q^*}$$

2. Θέτοντας $n=1$, η $Bin(1,q)$ ορίζεται ως

$$supp = \{0,1\}$$

$$\mathbb{P}(\{0\}) = \binom{1}{0} q^0 (1-q)^{1-0} = \frac{1!}{0!(1-0)!} 1-q = 1-q$$

$$\frac{1}{1 \cdot 1} = 1$$

$$\mathbb{P}(\{1\}) = \binom{1}{1} q^1 (1-q)^{1-1} = \frac{1!}{1!(1-1)!} q = q.$$

$$\frac{1}{1 \cdot 1} = 1$$

Δηλ. $Bin(1,q) = Ber(q)$ $\forall q \in (0,1)$

Συνεπώς η οικογένεια των Διωνυμικών εμπεριέχει ως υποοικογένεια τις Bernoulli για $n=1$.

Άσκηση. Τι θα συνέβαινε στα παραπάνω αν επιτρέποταν τα $q=0$ ή $q=1$.

4. Κατανομή Poisson ως προς παράμετρο $\lambda>0$ ($Poiss(\lambda)$)

Απειροπληθές

α. – $supp := \mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$

β. – $\mathbb{P}(\{i\}) := e^{-\lambda} \lambda^i / i!$, $i\in\mathbb{N}$

Περιγράφουν τα παραπάνω κάποια ορισμένη διακριτή κατανομή; Ελέγχουμε: i. το $supp=\mathbb{N}$ είναι διακριτό.

ii. $\mathbb{P}(\{i\}) = \underbrace{e^{-\lambda}}_{>0} \dfrac{\lambda^i}{i!} > 0$ $\forall i$, επειδή $\lambda>0$, $i!>0$

Επομένως η πιθανότητα που αποδίδεται σε κάθε στοιχείο του supp είναι αυστηρά θετική.

iii. $\mathbb{P}(supp) = \mathbb{P}(\mathbb{N}) = \mathbb{P}(\{0,1,2,\dots\}) \underset{\text{αρ.προσθ.}}{=} \mathbb{P}(\{0\})+\mathbb{P}(\{1\})+$
$+\mathbb{P}(\{2\})+\dots+\mathbb{P}(\{n\})+\dots$

σύνολο των φυσικών

→ απειροπληθές αριθμήσιμο άθροισμα

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{i\}) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} =$$

Απειροπληθή αθροίσματα που στα μαθηματικά αναφέρεται πραγματική σειρά. → Χωρίς να εξηγούμε το γιατί, σε τέτοιου είδους αθροίσματα που θα συναντήσουμε σε αυτό το μάθημα θα μπορούμε να τα διαχειριζόμαστε αλγεβρικά όπως τα συνήθη πεπερασμένα αθροίσματα, π.χ. να βγάζουμε κοινούς παράγοντες.

↘ Μαθηματικά ΙΙ.

$$= \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} + e^{-\lambda}\frac{\lambda^1}{1!} + e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!} + \dots + e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} + \dots$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!} \quad (*)$$

→ αρκεί να υπολογίσουμε αυτό.

$x=\lambda$

Ανάπτυγμα McLaurin της e^x

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!} \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

→ Εξωγενές! Αν χρειάζεται κάπου θα δίνεται!

Εξαιτίας του παραπάνω αναπτύγματος έχουμε (θέτουμε $x=\lambda$)

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!} = e^{\lambda} \quad \text{συνεπώς} \quad (*) = e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i/i! = e^{-\lambda}e^{\lambda}$$

$$= e^{-\lambda+\lambda} = e^0 = 1.$$

Επομένως έχουμε $\mathbb{P}(supp) = \dots = 1$ επομένως

Τα παραπάνω περιγράφουν μια καλώς ορισμένη διακριτή κατανομή που ονομάζεται κατανομή Poisson με παρ. λ.

...

↓

Το πρώτο παράδειγμα που εξετάζουμε με απειροπληθές supp

[redacted]

Συνέχεια παραδείγματος κατ. Poisson: $\lambda>0$

α. $supp=\mathbb{N}$

β. $i\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\{i\})=e^{-\lambda}\lambda^i/i!$ → Poiss(λ)

— Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα (Mc Laurin) $e^x=\sum_{i=0}^{\infty} x^i/i!$ $\forall x\in\mathbb{R}$, είδαμε ότι τα α, β συμφωνούν καλώς ορισμένη διακριτή κατανομή στο $\mathbb{R}$ (Poiss(λ)).

Παραδείγματα υπολογισμού πιθανοτήτων για την Poiss(λ)

$\mathbb{P}(A)$: — $A=(0,1)$, $\mathbb{P}((0,1))=\mathbb{P}((0,1)\cap supp)$ ξένα μεταξύ τους

$=\mathbb{P}((0,1)\cap\mathbb{N})=\mathbb{P}(\emptyset)=0$

— $A=\{0,1\}$, $\mathbb{P}(\{0,1\})=\mathbb{P}(\{0,1\}\cap supp)$

$=\mathbb{P}(\{0,1\}\cap\mathbb{N})=\mathbb{P}(\{0,1\})=\mathbb{P}(\{0\}\cup\{1\})$

$\overset{\text{προσθ.}}{=}\mathbb{P}(\{0\})+\mathbb{P}(\{1\})=e^{-\lambda}\underbrace{\lambda^0/0!}_{1}+e^{-\lambda}\underbrace{\lambda^1/1!}_{\lambda}$

$=e^{-\lambda}1+e^{-\lambda}\lambda=e^{-\lambda}(1+\lambda)$

— $A=[0,1]$, $\mathbb{P}([0,1])=\mathbb{P}([0,1]\cap supp)=$

$=\mathbb{P}([0,1]\cap\mathbb{N})=\mathbb{P}(\{0,1\})=\ldots=e^{-\lambda}(1+\lambda)$

Τέλος Διάλεξης 11

— $A=\{x\in\mathbb{R}: x^2=1\}=\{-1,1\}$

$\mathbb{P}(\{x\in\mathbb{R}: x^2=1\})=\mathbb{P}(\{-1,1\}\cap supp)=$

$=\mathbb{P}(\{-1,1\}\cap\mathbb{N})=\mathbb{P}(\{1\})=e^{-\lambda}\lambda^1/1!=e^{-\lambda}\cdot\lambda$

− A = άρτιοι αριθμοί $= \{0, 2, 4, \dots\} =$
$= \{2x, x \in \mathbb{N}\}$
$\mathbb{P}(\{2x, x \in \mathbb{N}\})$

− $A = \mathbb{Z}$ → σύνολο των ακεραίων

$\mathbb{P}(\mathbb{Z}) = \mathbb{P}(\mathbb{Z} \cap supp) = \mathbb{P}(\mathbb{Z} \cap \mathbb{N})$
$= \mathbb{P}(\mathbb{N}) = 1.$

$\boxed{\mathbb{P}(\mathbb{Q}) = ;}$

$\mathbb{Q} \supseteq \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{Q}) = 1$

Παρατήρηση: αν $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ με $\lambda_1 \neq \lambda_2$ έχουμε ότι $Poiss(\lambda_1) \neq Poiss(\lambda_2)$, οπότε έχουμε τόσες κατανομές Poisson όσες κ' οι διαφορετικές τιμές που μπορεί να πάρει το λ. Συνεπώς θα παρατηρούμε εξετάζοντας με την οικογένεια από κατανομές Poisson.

Αφού π.χ.
$\lambda_1 \quad \lambda_2$
$\mathbb{P}(\{0\}) \quad \mathbb{P}(\{0\})$
$e^{-\lambda_1} \neq e^{-\lambda_2}$
$\Rightarrow Poiss(\lambda_1) \neq Poiss(\lambda_2)$

Παρατήρηση: Είναι δυνατόν να χρησιμοποιήσουμε τα προηγούμενα παραδείγματα και ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές προκειμένου να κατασκευάσουμε περισσότερα παραδείγματα διακριτών (φροντιστήριο).

Υπάρχουν κ' άλλα παραδείγματα διακριτών που δεν μπορούν να προκύψουν έτσι.

Υπενθύμιση — Ταξινόμηση των κατανομών βάσει των ιδιοτήτων του στηρίγματός τους:

α. Διακριτές — το supp διακριτό (εύκολα περιγράψιμες)

β. Συνεχείς — το supp έχει την μορφή διαστήματος ή ένωσης διαστημάτων (π.χ. ομοιόμορφη, εκθετική, κανονική κατανομή, κ.λπ.)

γ. Μεικτές — το supp έχει ένα διακριτό μέρος κ' είναι ξένο ως

Σε κάθε περίπτωση:
$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap supp)$ (*)
− α. (*) = άθροισμα πιθ. αφού το $A \cap supp$ έχει το πολύ πλήθος ίσο με το πλήθος του $\mathbb{N}$ ⇒ εφαρμόσιμη η προσθετικότητα

β, γ, δ. Το $\Delta \setminus supp$ είναι δυνατόν να έχει πλήθος στοιχείων μεγαλύτερο του πλήθους του $\mathbb{N}$ ⟹ η προσθετικότητα δεν είναι εφαρμόσιμη.

⟹ για να περιγράψουμε μια τέτοια κατανομή μας χρειάζονται νέες βοηθητικές έννοιες

Πέραν το προηγούμενο συνεχές μέρος. (π.χ. το supp θα μπορούσε να είναι το $\underbrace{\{0\}}_{\text{διακριτό μέρος}} \cup \underbrace{[1,2]}_{\text{διάστημα}}$)

(Θα δούμε κάποια ενδεικτικά παραδείγματα μεικτών χωρίς να ασχοληθούμε με αυτές στη συνέχεια).

δ. Ιδιάζουσες κατανομές — το supp οποιασδήποτε τέτοιας κατανομής δεν είναι ούτε διακριτό ούτε συνεχές ούτε μεικτό π.χ. supp = Cantor Set κ' η κατανομή Cantor (δείτε Wikipedia).

(δεν θα ασχοληθούμε καθόλου με τέτοιου είδους κατανομές).

Οι β, γ, δ δεν είναι εύκολα περιγράψιμες, και για να περιγραφούν θα μας χρειαστούν αναπαραστάσεις των κατανομών από πιο οικείες έννοιες. Θα δούμε τρεις αναπαραστάσεις:

i. την αθροιστική συνάρτηση
ii. την συνάρτηση πυκνότητας
iii. την ανάγνωση της κατανομής ως διαδικασίας ολοκλήρωσης κατάλληλων συναρτήσεων

I. Αθροιστική Συνάρτηση (Cumulative Distribution Function - cdf)

- Ορίζεται για συνάρτηση $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Αν γνωρίζουμε την αθροιστική μπορούμε να βρίσκουμε τις πιθανότητες που αποδίδονται από την κατανομή, οπότε γνωρίζουμε την κατανομή.
- Υπάρχει και είναι μοναδική για κάθε κατανομή πιθανότητας στο $\mathbb{R}$.

μπορεί να ανήκει σε όποια κατηγορία

Ορισμός: Έστω ότι $\mathbb{P}$ είναι κατανομή πιθανότητας επί του $\mathbb{R}$. Αθροιστική συνάρτηση της $\mathbb{P}$ $(F: \mathbb{R} \to \mathbb{R})$ είναι αυτή που ορίζεται ως: $F(x) := \mathbb{P}((-\infty, x])$,

ορισμός

για όποιο $x \in \mathbb{R}$.

Παρατήρηση: αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}((-\infty,x]) \in \mathbb{R}$, η F είναι πάντοτε καλώς ορισμένη ως πραγματική συνάρτηση

Παραδείγματα:

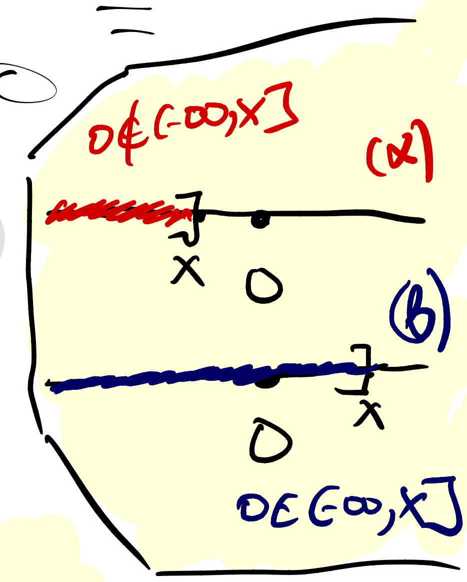
1. Εκφυλισμένη κατανομή στο 0: α. $supp = \{0\}$
β. $\mathbb{P}(\{0\}) = 1$

Ποια είναι η F της εκφυλισμένης κατανομής;

Έχουμε ότι αν $x \in \mathbb{R}$, πρέπει να υπολογίσουμε το $\mathbb{P}((-\infty, x])$ ως προς αυτή την κατανομή,

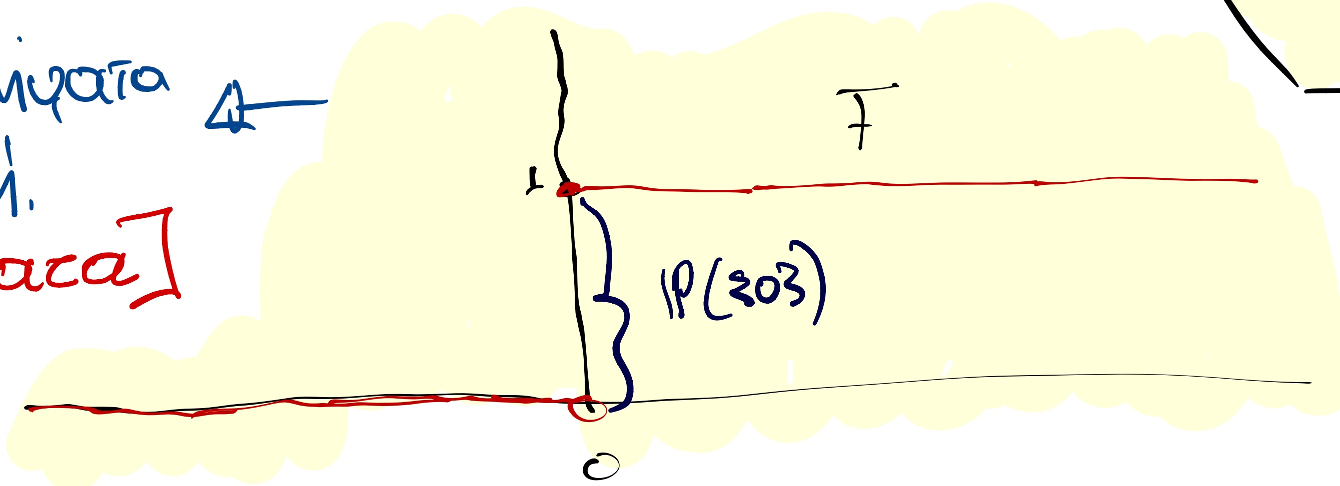
Οπότε $(-\infty,x] \cap supp = (-\infty,x] \cap \{0\} = \begin{cases} \emptyset, & x<0 \quad (\alpha) \\ \{0\}, & x \geq 0 \quad (\beta) \end{cases}$

συνεπώς $F(x) = \mathbb{P}((-\infty,x]) = \begin{cases} \mathbb{P}(\emptyset), & x<0 \\ \mathbb{P}(\{0\}), & x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$



και το γράφημα αυτής είναι το

κατά τμήματα σταθερή.
[2 τμήματα]
#supp=1



2. Bernoulli με παράμετρο $q \in (0,1)$: α. $supp = \{0,1\}$
β. $\mathbb{P}(\{0\}) = 1-q$
$\mathbb{P}(\{1\}) = q$

Ποιά είναι η F της συγκεκριμένης κατανομής;

Έστω $x \in \mathbb{R}$, θα πρέπει να βρούμε την $\mathbb{P}((-\infty,x])$.

Έχουμε ότι $(-\infty,x] \cap supp = (-\infty,x] \cap \{0,1\} =$

$$\begin{cases} \emptyset, & x<0 \\ \{0\}, & 0 \leq x < 1 \\ \{0,1\}, & x \geq 1 \end{cases}$$

Επομένως: $F(x) = \mathbb{P}((-\infty,x]) = \begin{cases} \mathbb{P}(\emptyset), & x<0 \quad (\alpha) \\ \mathbb{P}(\{0\}), & 0 \le x < 1 \quad (\beta) \\ \mathbb{P}(\{0,1\}), & x \ge 1 \quad (\gamma) \end{cases}$

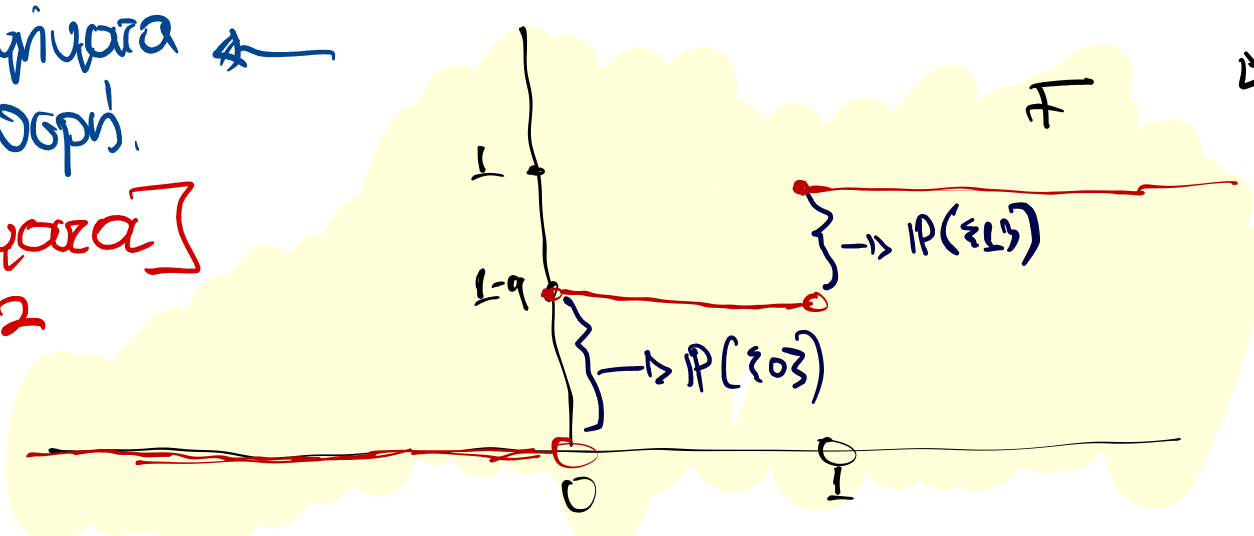
$$= \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-q, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

γράφημα

κατά τμήματα σταθερή.

[3-τμήματα]

#supp=2

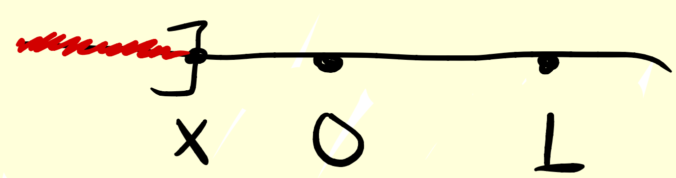


Στο φροντιστήριο θα δούμε τις αθροιστικές συναρτήσεις για την διωνυμική και την Poisson (*)

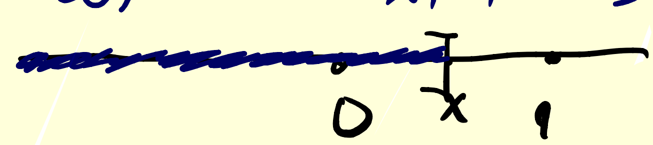
Αύριο θα δούμε τις χαρακτηριστικές ιδιότητες της F και το γιατί η F αναπαριστά την P αυτής.

(*) Πόσα τμήματα θα έχει το γράφημα της Bin(n,q); της Pois(λ);

(α) $0,1 \notin (-\infty,x]$



(β) $0 \in (-\infty,x], 1 \notin (-\infty,x]$



(γ) $0,1 \in (-\infty,x]$

[redacted]

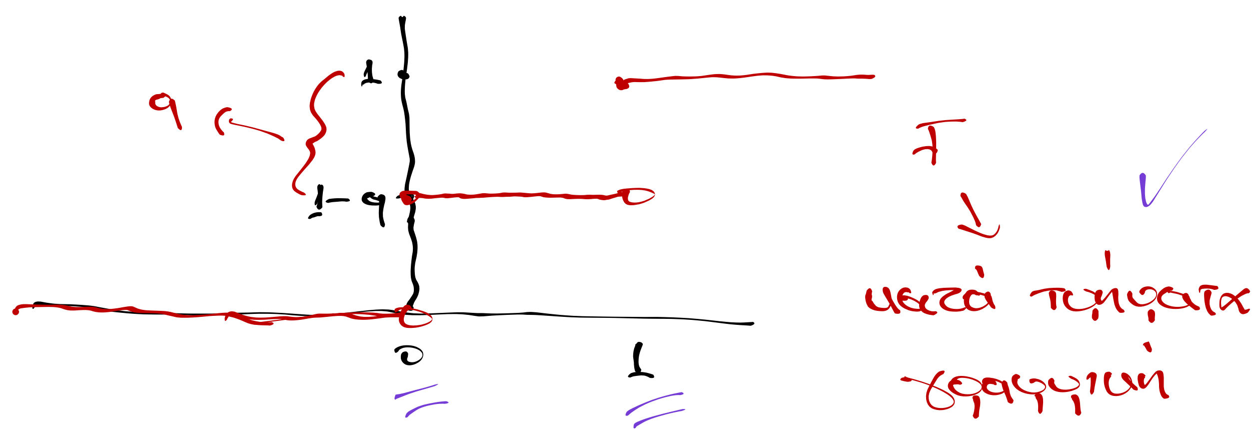
– Είδαμε τον ορισμό της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής πιθανότητας στο $\mathbb{R}$: αν $\mathbb{P}$ κατανομή τότε η αθροιστική αυτής $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$F(x) := \mathbb{P}((-\infty, x]) \; , \; x\in\mathbb{R}$$

– η F πάντοτε είναι καλώς ορισμένη πραγματική συνάρτηση

– π.χ. αν $\mathbb{P} = Ber(q)$ τότε

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-q, & 0\le x<1 \\ 1, & 1\le x \end{cases}$$



– Θα δούμε ότι η F αναπαριστά την $\mathbb{P}$

δηλ.
- γνώση της F $\Longleftrightarrow$ γνώση της $\mathbb{P}$
- οι ιδιότητες που έχει η $\mathbb{P}$ θα πρέπει να αντανακλώνται σε ιδιότητες της F

– Χρησιμότητα: Σε διάφορες περιπτώσεις η F "πιο εύκολα" διαχειρίσιμη από την $\mathbb{P}$, αφού είναι συνάρτηση $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Τέλος Διάλεξης 11

Χαρακτηριστικές ιδιότητες της F (θα μας οδηγήσουν σε έναν δείγμα που θα επιβεβαιώνει τα παραπάνω)

1. Η F είναι αύξουσα ($x_1 > x_2 \Rightarrow F(x_1) \geq F(x_2)$)

(όχι αναγκαστικά γν. αύξουσα)

Απόδειξη. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 > x_2$. Αρκεί να δείξουμε ότι $F(x_1) - F(x_2) \geq 0$. Έχουμε

$$F(x_1) - F(x_2) = \mathbb{P}((-\infty, x_1]) - \mathbb{P}((-\infty, x_2]) \geq 0$$

Επίσης $x_1 > x_2 \Rightarrow (-\infty, x_1] \supset (-\infty, x_2] \longrightarrow$ μονοτονία της $\mathbb{P}$

$A \supseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \geq \mathbb{P}(B)$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{P}((-\infty, x_1]) \geq \mathbb{P}((-\infty, x_2]) \Leftrightarrow \mathbb{P}((-\infty, x_1]) - \mathbb{P}((-\infty, x_2]) \geq 0$$

Επομένως η F είναι αύξουσα επειδή η $\mathbb{P}$ μονότονη.

(παράδειγμα του πως ιδιότητα της $\mathbb{P}$ αντανακλάται σε ιδιότητα της F) $\square$

2. $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$ κ' $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

Επιφύλαξη: η ιδιότητα αυτή βασίζεται σε μια ιδιότητα συνέχειας της $\mathbb{P}$ που δεν έχουμε μελετήσει και οφείλεται στην "μέρος τηλίκους" προσθετικότητα. Θα σκιαγραφήσουμε την απόδειξη της & θεωρώντας αυτή την ιδιότητα δεδομένη

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} P(-\infty, x] = \ldots = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}(-\infty,n]\right)$$

γίνεται χρήση της συνέχειας που αποσιωπάται

δεν χρειάζεται φοιβίνεται

$$= \mathbb{P}(\mathbb{R}) = 1.$$

Έχουμε ότι $\bigcup_{n=0}^{\infty}(-\infty,n] = (-\infty,0] \cup (-\infty,1] \cup (-\infty,2] \cup \ldots \cup (-\infty,n] \cup \ldots = ;$ [δώσουμε]

Η ένωση αυτή θα ισούται με το $\mathbb{R}$· αρκεί να δείξουμε ότι αν $x\in\mathbb{R}$ τότε το x θα βρίσκεται στην ένωση. Αλλά για να το δείξουμε αυτό αρκεί να δείξουμε ότι

$x\in(-\infty,n]$ για κάποιο $n\in\mathbb{N}$.

Αλλά ξέρω ότι αν $x\in\mathbb{R}$ τότε υπάρχει φυσικός n^* με $x\leq n^* \Rightarrow x\in(-\infty,n^*]$ συνεπώς το x θα βρίσκεται σε αυτό το στοιχείο της ένωσης που αντιστοιχεί στο $n=n^*$.

Οπότε το x θα ανήκει στην ένωση. Αφού το x αυθαίρετο, κάθε πραγματικός θα βρίσκεται στην ένωση

Οπότε $\bigcup_{n=0}^{\infty}(-\infty,n] = \mathbb{R}$. Άρα $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}(-\infty,n]\right) = \mathbb{P}(\mathbb{R}) = 1$.

Αντίστοιχως,

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} \mathbb{P}(-\infty,x] = \ldots = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty}(-\infty,-n]\right) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

δεν χρειάζεται να δείξετε

συνέχεια της $\mathbb{P}$ που αποδείξαμε

Έχουμε $\bigcap_{n=0}^{\infty}(-\infty,-n] = (-\infty,0] \cap (-\infty,-1] \cap (-\infty,-2] \cap \ldots$
$\ldots \cap (-\infty,-n] \cap \ldots$

Στην τομή δεν βρίσκεται κανένας πραγματικός αριθμός (δηλ. η τομή ισούται με το $\emptyset$). Αυτό ισχύει για τον εξής λόγο: Έστω ότι $x \in \mathbb{R}$ κ' το x βρίσκεται στην τομή. Αυτό σημαίνει ότι $x \in (-\infty,-n]$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Αυτό όμως δεν γίνεται αφού αν $x \in \mathbb{R}$ τότε υπάρχει $n^* \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $-n^* < x \Leftrightarrow x \notin (-\infty,-n^*]$ άρα το x δεν βρίσκεται τουλάχιστον στον παράγοντα της τομής που αντιστοιχεί στο $n=n^*$. Άρα το $x \notin \bigcap_{n=0}^{\infty}(-\infty,-n]$. Αφού το x αυθαίρετο, κανένας πραγματικός δεν βρίσκεται στην τομή. Επομένως $\bigcap_{n=0}^{\infty}(-\infty,-n] = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty}(-\infty,-n]\right)$

$$= \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

3. Η F είναι από δεξιά συνεχής.

Προεργασία: [υπενθύμιση] Αν έχουμε συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

i. η g θα είναι από δεξιά συνεχής στο x αν $\lim_{y\to x^+} g(y) = g(x)$ $\left(y\to x^+ \Leftrightarrow y\to x \text{ κ' } y\geq x\right)$

η g θα είναι από δεξιά συνεχής αν είναι από δεξιά συνεχής σε κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. η g θα είναι από αριστερά συνεχής στο x αν $\lim_{y\to x^-} g(y) = g(x)$ $\left(y\to x^- \Leftrightarrow y\to x \text{ κ' } y\le x\right)$

η g θα είναι από αριστερά συνεχής αν είναι από αριστερά συνεχής σε κάθε x.

iii. η g συνεχής στο x αν είναι ταυτόχρονα από δεξιά κ' από αριστερά συνεχής στο x, δηλ.

$$\lim_{y\to x^-} g(y) = g(x) = \lim_{y\to x^+} g(y).$$

Η g συνεχής αν συνεχής σε κάθε x. □

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι η F είναι από δεξιά στο x όπου το x αυθαίρετο.

$$\lim_{y\to x^+} F(y) = \lim_{y\to x^+} \mathbb{P}((-\infty,y]) = \dots = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, x+\tfrac{1}{n}]\right) = \mathbb{P}((-\infty,x]) = F(x).$$

προκύπτει από την ιδιότητα της συνέχειας της $\mathbb{P}$ κ' αποσιωπείται

Θα χρειάζεται
θα δίνεται

Έχουμε ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, x+\frac{1}{n}] = (-\infty, x+1] \cap (-\infty, x+\frac{1}{2}] \cap (-\infty, x+\frac{1}{3}] \cap \dots \cap (-\infty, x+\frac{1}{n}] \cap \dots$

Έχουμε ότι καθώς $n\to+\infty$, $x+\frac{1}{n} \to x$ (από δεξιά).

Η τομή θα ισούται με το $(-\infty,x]$ αφού:

αν $z\le x$ έχουμε ότι $z\in(-\infty, x+\frac{1}{n}]$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow$

$z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, x+\frac{1}{n}]$.

αν $z>x$ και αφού $x+\frac{1}{n} \to x$ θα υπάρχει $n^* \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $x+\frac{1}{n^*} < z \Rightarrow z \notin (-\infty, x+\frac{1}{n^*}]$ και αφού αυτό το διάστημα είναι στοιχείο της τομής (αντιστοιχεί στο $n=n^*$), το z δεν μπορεί να ανήκει στην τομή.

Άρα κάθε αριθμός $\leq x$ θα βρίσκεται στην τομή κ' κάθε αριθμός $>x$ δεν θα βρίσκεται στην τομή. Άρα $\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, x+\frac{1}{n}]$

$= (-\infty, x] \Rightarrow \mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, x+\frac{1}{n}]) = \mathbb{P}((-\infty, x]) = F(x)$.

ⲱ.

Άρα γνωρίζουμε ότι αν η F αθροιστική της κατανομής $\mathbb{P}$ τότε:

1. η F αύξουσα (μονοτονία)
2. $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ (ασυμπτωτική συμπεριφορά)
3. η F από δεξιά συνεχής. ∎

Ερώτημα: Ισχύει το αντίστροφο;

(δηλ. αν $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί τις 1,2,3, είναι αθροιστική κάποιας $\mathbb{P}$;)