Διάλεξη 9

* Διακριτές κατανομές
  - πιθανότητες στα στοιχεία του supp
  - Παραδείγματα

Στα προηγούμενα είδαμε ότι: αν $\mathbb{P}$ κατανομή στο $\mathbb{R}$

* Το supp αυτής → το μικρότερο κλειστό μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ μοναδιαίας πιθανότητας

* Αν $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ → $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap \text{supp})$ (*)

(ευκολία υπολογισμών)

* Ταξινόμηση μέσω supp:

i. Διακριτές (supp διακριτό)

ii. Συνεχείς (supp διάστημα ή ένωση διαστημάτων)

iii. μεικτές (supp έχει δύο ξένα μέρη, διακριτό κ' συνεχές)

iv. Ιδιάζουσες (τίποτα από τα παραπάνω)

[πχ: σύνολο Cantor - κατανομή Cantor]

Θα ασχοληθούμε κυρίως με:
i κ' ii
Ελάχιστα με
iii
καθόλου με
iv

* Αν $\underline{\underline{\mathbb{P}}}$ διακριτή τότε $\text{supp} = \{\underbrace{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots}\}$

απομονωμένα κ' με πλήθος $\leq \mathbb{N}$

κ'

$$\underline{\underline{\mathbb{P}(A)}} \overset{(*)}{=} \mathbb{P}(A \cap \{x_1\}) + \mathbb{P}(A \cap \{x_2\}) + \dots + \mathbb{P}(A \cap \{x_n\}) + \dots \quad (*)$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, n, \dots \quad \mathbb{P}(A \cap \{x_i\}) = \begin{cases} 0, & x_i \notin A \\ \mathbb{P}(\{x_i\}), & x_i \in A \end{cases}$$

Υπενθύμιση: Το να μπορούμε να περιγράψουμε την $\mathbb{P}$ (αυτό είναι το βασικό μας πρόβλημα) ισοδυναμεί με το να μπορούμε να υπολογίζουμε το $\mathbb{P}(A)$ $\forall A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$.

▸ Όταν $\mathbb{P}$ διακριτή το (*) μας λέει ότι για να υπολογίζουμε το $\mathbb{P}(A)$ αρκεί: a) να βρίσκουμε τα στοιχεία του supp που βρίσκονται στο A, b) να γνωρίζουμε την πιθανότητα που η $\mathbb{P}$ αποδίδει σε καθένα από αυτά και, γ) να αθροίζουμε τις εν λόγω πιθανότητες

[Το άθροισμα μπορεί να είναι αριθμήσιμο αλλά με πλήθος προσθετέων $\leq$ IN – σειρές - Μαθ. III]

▸ Οπότε προκύπτει το ερώτημα:

αν $\mathbb{P}$ διακριτή κ' $x \in$ supp, τι συμβολίζει με την $\mathbb{P}(\{x\})$; (μπορεί π.χ. να είναι μηδενική;)

[redacted]: Τι τιμή μπορεί να έχει το $\mathbb{P}(\{x_i\})$ όταν η $\mathbb{P}$ διακριτή κ' $x_i \in supp$;

Λήμμα. Αν η $\mathbb{P}$ διακριτή και το $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(\{x\}) > 0$ ανν $x \in supp$.

Απόδειξη: Έχουμε να δείξουμε τα

α. αν $\mathbb{P}(\{x\}) > 0$ τότε $x \in supp$, και

β. αν $x \in supp$ τότε $\mathbb{P}(\{x\}) > 0$

$A \Rightarrow B$ ισοδύναμο με όχι $B \Rightarrow$ όχι A

Για το α έχουμε: ισοδυνάμως αρκεί να δείξουμε ότι αν $x \notin supp$ τότε $\mathbb{P}(\{x\}) = 0$. Έχουμε ότι

αν $x \notin supp \iff x \in supp' \iff \{x\} \subseteq supp' \overset{\text{μον.}}{\Longrightarrow}$
$\mathbb{P}(\{x\}) \leq \mathbb{P}(supp') = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(\{x\}) = 0$.

(Στο παραπάνω δεν χρησιμοποιήθηκε πουθενά ότι η $\mathbb{P}$ είναι διακριτή - ισχύει για όποια κατανομή πιθανότητας)

β. Χρησιμοποιούμε απαγωγή σε άτοπο. Έστω χωρίς απώλεια γενικότητας ότι στο $x_1 \in supp$ έχουμε ότι $\mathbb{P}(\{x_1\}) = 0$.

Θεωρούμε το $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} - \{x_1\} = supp - \{x_1\} = \{x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$

Το $supp - \{x_1\}$ είναι επίσης διακριτό. Συνεπώς είναι μετρητό. Επίσης $supp - \{x_1\} \subset supp$. Υπολογίζουμε την

$\mathbb{P}(supp - \{x_1\}) = \mathbb{P}(supp) - \mathbb{P}(\{x_1\}) = 1 - 0 = 1$

$A \supseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A - B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$

$A = supp \quad B = \{x_1\}$

[Θυμηθείτε τις γενικές ιδιότητες των κατανομών που εξάγαμε]

Άρα η υπόθεση $\mathbb{P}(\{x_1\})=0$ μας οδηγεί στο
$\mathbb{P}(supp-\{x_1\})=1$.

Αλλά είδαμε ότι το $supp-\{x_1\}$ είναι κλειστό, και $supp-\{x_1\} \subsetneq supp$. Άρα έχουμε βρει κλειστό γνήσιο υποσύνολο του supp στο οποίο η $\mathbb{P}$ αποδίδει μοναδιαία πιθανότητα. Αυτό είναι άτοπο επειδή το supp εξ' ορισμού είναι το μικρότερο κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο η $\mathbb{P}$ αποδίδει πιθανότητα 1. Άρα $\mathbb{P}(\{x_1\})>0$. Επειδή το x_1 το επιλέξαμε χωρίς οποιαδήποτε γενικότητας αυτό θα ισχύει για κάθε στοιχείο του supp. □

[Το β. δεν ισχύει γενικά για κατανομές που δεν είναι διακριτές. Θα δούμε παραδείγματα κατανομών που δεν είναι διακριτές και οι οποίες είτε σε κάποια είτε σε κάθε στοιχείο του στηρίγματος τους αποδίδουν μηδενική πιθανότητα]. → π.χ. Θα δούμε ότι για την $N(0,1)$ $supp=\mathbb{R}$ κ' $\mathbb{P}(\{x\})=0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Συνεπώς για να περιγράψω μια διακριτή κατανομή αρκεί να γνωρίζω:

α. Το supp, και
β. η πιθανότητα που αποδίδεται σε κάθε στοιχείο του supp. >0

Επομένως για να ελέγξω το αν μία περιγραφή διακριτής κατανομής που βασίζεται στα α, β είναι καλώς ορισμένη αρκεί να ελέγξω i. αν το supp είναι διακριτό, ii. το αν η πιθανότητα που αποδίδεται σε κάθε στοιχείο του στηρίγματος είναι αυστηρά θετική, και iii. το αν $\mathbb{P}(supp)=1$.

Βάσει της παραπάνω διαδικασίας μπορούμε να δεικνύσουμε να βλέπουμε παραδείγματα διακριτών κατανομών.

▶ Παραδείγματα Διακριτών κατανομών.

Στα παραδείγματα το στήριγμα θα σημαδεύεται.

1. Εκφυλισμένη κατανομή στο 0.

Πρόκειται για την κατανομή που ορίζεται από τα:

α. $supp = \{0\}$

β. $\mathbb{P}(\{0\}) = 1$ ← αναγκαστικά

i. Το στήριγμα διακριτό αφού είναι πεπερασμένο. ii. $\mathbb{P}(\{0\}) = 1 > 0$ επομένως σε κάθε στοιχείο του στηρίγματος αποδίδεται αυστηρά θετική πιθανότητα. iii $\mathbb{P}(supp) = \mathbb{P}(\{0\}) = 1$.

Άρα το παραπάνω προσδιορίζει για κάποιος ορισμένη διακριτή κατανομή που ονομάζεται εκφυλισμένη κατανομή στο 0.

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα που αποδίδει η συγκεκριμένη κατανομή σε όποιο $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ θα έχουμε

το $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap supp) = \mathbb{P}(A \cap \{0\}) = \begin{cases} \mathbb{P}(\emptyset), & 0 \notin A \\ \mathbb{P}(\{0\}), & 0 \in A \end{cases} = \begin{cases} 0, & 0 \notin A \\ 1, & 0 \in A \end{cases}$

(αυτή είναι η $\mathbb{Q}$ που είδαμε σε προηγούμενες διαλέξεις).

[redacted]

(Συνέχεια παραδείγματος εκφυλισμένης κατανομής στο 0)

Υπενθύμιση
- supp = {0} ✓
- $\mathbb{P}(\{0\}) = 1$ ✓

– αν $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ τότε $\mathbb{P}(A) = \begin{cases} 0, & 0 \notin A \\ 1, & 0 \in A \end{cases}$

π.χ. $A = (0,1)$, $\mathbb{P}((0,1)) \overset{0 \notin (0,1)}{=} 0$ $\quad A = \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\mathbb{N}) \overset{0 \in \mathbb{N}}{=} 1$

$A = [0,1]$, $\mathbb{P}([0,1]) \overset{0 \in [0,1]}{=} 1$ $\quad A = \underset{\mathbb{N}-\{0\}}{\underset{\parallel}{\mathbb{N}^*}}$, $\mathbb{P}(\mathbb{N}^*) \overset{0 \notin \mathbb{N}^*}{=} 0$

$A = [0,1)$, $\mathbb{P}([0,1)) \overset{0 \in [0,1)}{=} 1$,

$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 2\} = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \not\ni 0$ ← Το A ορίζεται από σύστημα εξισώσεων

$\mathbb{P}(\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 2\}) = 0$

– Είναι δυνατόν να ορισθούν άλλες κατανομές με supp = {0}

Επειδή θα πρέπει $\mathbb{P}(\{0\}) = 1$, η μοναδική κατανομή με αυτό το στήριγμα είναι η παραπάνω.

Προσπαθήστε ως άσκηση: αν $x \in \mathbb{R}$, να ορίσετε την εκφυλισμένη κατανομή στο x. (Είναι δυνατόν να δειχθεί ότι για κάθε x, η εκφυλισμένη κατανομή στο x είναι δυνατόν να παραχθεί από την εκφυλισμένη στο μηδέν κ' κατάλληλης τυχαίας μεταβλητής – φροντιστήριο!).

2. Κατανομή Bernoulli με παράμετρο $q \in (0,1)$

($Ber(q)$)

→ δεν εξαρτάται από το q

α. — $supp = \{0,1\}$ → δύο στοιχεία

β. — $\mathbb{P}(\{0\}) = 1-q$, $\mathbb{P}(\{1\}) = q$

→ εξαρτώνται από το q

Είναι το παραπάνω καλώς ορισμένο;

i. το στήριγμα που έχει δοθεί είναι πεπερασμένο, άρα διακριτό. ii. $\mathbb{P}(\{0\}) > 0$, $q \neq 1$, $\mathbb{P}(\{1\}) > 0$, $q \neq 0$.

iii. $\mathbb{P}(supp) = \mathbb{P}(\{0,1\}) = \mathbb{P}(\{0\}) + \mathbb{P}(\{1\}) = 1-q+q = 1$.

↳ εύλογη εξήγηση

Συνεπώς το παραπάνω ορίζει μια καλώς ορισμένη διακριτή κατανομή επί του $\mathbb{R}$, που ονομάζεται Bernoulli με παράμετρο q.

Τέλος Διάλεξης 9

Αν $A \in \mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$, ποιό είναι $\mathbb{P}(A)$ για την $Ber(q)$;

Έχουμε ότι $A \cap supp = A \cap \{0,1\} = \begin{cases} \emptyset, & 0,1 \notin A \\ \{0\}, & 0 \in A, 1 \notin A \\ \{1\}, & 0 \notin A, 1 \in A \\ \{0,1\}, & 0,1 \in A \end{cases}$ ← Τέσσερα δυνατά ενδεχόμενα

$A \cap \{0,1\} = (A \cap \{0\}) \cup (A \cap \{1\})$, όπου $A \cap \{0\}$ είναι $\{0\}$ ή $\emptyset$ και $A \cap \{1\}$ είναι $\{1\}$ ή $\emptyset$

Οπότε $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap \{0,1\}) = \begin{cases} \mathbb{P}(\emptyset), & 0,1 \notin A \\ \mathbb{P}(\{0\}), & 0 \in A, 1 \notin A \\ \mathbb{P}(\{1\}), & 0 \notin A, 1 \in A \\ \mathbb{P}(\{0,1\}), & 0,1 \in A \end{cases} = \begin{cases} 0, & 0,1 \notin A \\ 1-q, & 0 \in A, 1 \notin A \\ q, & 0 \notin A, 1 \in A \\ 1, & 0,1 \in A \end{cases}$

π.χ. $A = (0,1)$, $\mathbb{P}((0,1)) \overset{0,1 \notin A}{=} 0$

$A = [0,1]$, $\mathbb{P}([0,1]) \overset{0,1 \in A}{=} 1$

$A = [0,1)$, $\mathbb{P}([0,1)) \overset{0 \in A, 1 \notin A}{=} 1-q$

$A = (0,1]$, $\mathbb{P}((0,1]) \overset{0 \notin A, 1 \in A}{=} q$

$A = \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}(\mathbb{Z}) \overset{0,1 \in A}{=} 1$

σύνολο των ακεραίων

$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$, $\mathbb{P}(\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\}) \overset{0 \notin A,\, 1 \in A}{=} q_1$

κ.ο.κ.

- Αν $q_1, q_2 \in (0,1)$, $q_1 \neq q_2$, $Ber(q_1) \neq Ber(q_2)$

Επειδή για την $Ber(q_1)$ έχουμε $\mathbb{P}(\{0\}) = q_1$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \# \qquad\quad \#$

για την $Ber(q_2)$ » $\mathbb{P}(\{0\}) = q_2$

Δηλ. κάθε διαφορετική τιμή του q προσδιορίζει φανερά για διαφορετική κατανομή Bernoulli. Δηλ. έχουμε τόσες κατανομές Bernoulli όσες και οι τιμές που μπορεί να πάρει το q. Δηλ. έχουμε τόσες κατανομές Bernoulli όσα κ' τα στοιχεία $(0,1)$.

Συνεπώς σε αυτό το παράδειγμα έχουμε περιγράψει μια ολόκληρη οικογένεια από κατανομές που "περιγράφονται" από την παράμετρο q. [Κ' εδώ έχουμε το φαινόμενο όπου συμβαίνει παράμετρος περιγράφει την οικογένεια

- Τι θα συνέβαινε αν επιτρέπαμε $q=0$ ή/και $q=1$; (Άσκηση)
[Συνδέστε το με την προηγούμενη άσκηση]

3. Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n \in \mathbb{N}^*$, $q \in (0,1)$
(Binomial distribution) - $Bin(n,q)$ ↳ διάνυσμα παραμέτρων (n,q)

α. - $supp = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ → $n+1$ στοιχεία

Υπενθύμιση: $! : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ παραγοντικό - factorial | συνδέεται με την συνάρτηση Γ που θα συναντήσετε στο φροντιστήριο

αν $i \in \mathbb{N}$ $\quad i! = \begin{cases} 1, & i = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots i, & i > 0 \end{cases}$

$\binom{n}{i} := \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$

↳ πλήθος συνδυασμών n ως προς i, $i, n \in \mathbb{N}$, $i \le n$

π.χ. $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0!(n-0)!} = \dfrac{\cancel{n!}}{1 \cdot \cancel{n!}} = 1$

$\binom{n}{1} = \dfrac{n!}{1!(n-1)!} = \dfrac{\overbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)}^{(n-1)!} \cdot n}{(n-1)!} = \dfrac{\cancel{(n-1)!} \cdot n}{\cancel{(n-1)!}} = n$

B. — $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, $\mathbb{P}(\{i\}) := \binom{n}{i} q^{i} (1-q)^{n-i}$ (*)

π.χ. $\mathbb{P}(\{0\}) = \binom{n}{0} q^0 (1-q)^{n-0} = \dfrac{n!}{0!(n-0)!}(1-q)^n = \dfrac{n!}{n!}(1-q)^n = (1-q)^n$

...

$\mathbb{P}(\{1\}) = \binom{n}{1} q^1 (1-q)^{n-1} = nq(1-q)^{n-1}$

(*) έχουμε εξάρτηση των πιθανοτήτων από τις παραμέτρους n, q

Το προηγούμενο περιγράφει καλώς ορισμένη διακριτή κατανομή;

i. το supp είναι πεπερασμένο άρα διακριτό. ii.

επειδή $q \neq 0$, $q \neq 1$, $\binom{n}{i} q^{i} (1-q)^{n-i} > 0$ $\forall i = 0, 1, \ldots, n$

$\checkmark$ $\checkmark$ $\checkmark$

>0 >0 >0

Συνεπώς $\forall i = 0, 1, \ldots, n$ $\mathbb{P}(\{i\}) > 0$.

Άθροισμα από $n+1$ πιθανότητες

iii. $\mathbb{P}(\text{supp}) = \mathbb{P}(\{0, 1, 2, \ldots, n\}) = \mathbb{P}(\{0\}) + \mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) + \ldots + \mathbb{P}(\{n\}) =$

$= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(\{i\}) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} q^{i} (1-q)^{n-i} \overset{?}{=} 1$

πρέπει να το ελέγξουμε

(Διωνυμικό ανάπτυγμα - Binomial Expansion)

θα μας χρειαστεί!

$\binom{n}{0} q^0 (1-q)^{n-0} + \binom{n}{1} q^1 (1-q)^{n-1} + \binom{n}{2} q^2 (1-q)^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n} q^n (1-q)^{n-n}$

$\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n} = 1$

[redacted]

Συνέχεια παραδείγματος 3. (Διωνυμική Κατανομή με παραμέτρους $n \in \mathbb{N}^*$, $q \in (0,1)$ - $Bin(n,q)$)

$n, i \in \mathbb{N}$, $n \geq i$

$\binom{n}{i} := \frac{n!}{i!(n-i)!}$

- $Supp = \{0,1,2,\dots,n\}$ → $n+1$
- $\mathbb{P}(\{i\}) = \binom{n}{i} q^i (1-q)^{n-i}$, $i \in supp$

Έλεγχος καλώς ορισμένου: ...

iii $\mathbb{P}(supp) = \mathbb{P}(\{0,1,2,\dots,n\}) = \dots = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} q^i (1-q)^{n-i}$ (*)

$\stackrel{?}{=} 1$

για $\alpha=q, b=1-q$ έχουμε την δεξιά πλευρά του διων. αναπτύγματος

Διωνυμικό Ανάπτυγμα - Binomial Expansion

Αν $\alpha, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ τότε

$$(\alpha+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \alpha^i b^{n-i}$$

αν μας χρειάζεται κάπου θα μας δίνεται!

Μπορούμε να διαισθανθούμε εύκολα ότι βάσει του παραπάνω: αν

π.χ. $n=0$ $(\alpha+b)^0 = 1$

π.χ. $n=1$ $(\alpha+b)^1 = \alpha+b$

π.χ. $n=2$ $(\alpha+b)^2 = \alpha^2+\alpha b+b\alpha+b^2$

⋮

Παρατηρούμε ότι η δεξιά πλευρά του διων. αναπτ. είναι το (*) όταν θέσουμε $\alpha=q$, $b=1-q$

Συνεπώς έχουμε $(*) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} q^i (1-q)^{n-i} \underset{\text{Διων. Αν.}}{=} (\cancel{q}+1-\cancel{q})^n$

$= 1^n = 1.$

Επομένως έχουμε $\mathbb{P}(\text{supp}) = 1$ άρα και το iii επιβεβαιώνεται, συνεπώς το παραπάνω περιγράφει μια καλώς ορισμένη διακριτή κατανομή την οποία ονομάζουμε Διωνυμική.

Τέλος Διάλεξης 10

Π.χ. Έστω ότι $n=2$, $\text{Bin}(2,q)$

$\text{Supp} = \{0,1,2\}$

$\mathbb{P}(\{i\}) = \binom{2}{i} q^i (1-q)^{2-i}$ πεπερ. σύν.

$A = (0,1)$, $\mathbb{P}((0,1)) = \mathbb{P}((0,1)\cap \text{supp}) = \mathbb{P}((0,1)\cap\{0,1,2\})$ διάστημα

$= \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

$A = [0,1]$, $\mathbb{P}([0,1]) = \mathbb{P}([0,1]\cap\text{supp}) = \mathbb{P}([0,1]\cap\{0,1,2\})$

$= \mathbb{P}(\{0,1\}) \underset{\text{προσθ.}}{=} \mathbb{P}(\{0\}) + \mathbb{P}(\{1\}) =$

$= \binom{2}{0} q^0 (1-q)^{2-0} + \binom{2}{1} q^1 (1-q)^{2-1}$ $2! = 2$

$= \dfrac{2!}{0!(2-0)!}(1-q)^2 + \dfrac{2!}{1!(2-1)!} q(1-q)$

$\dfrac{2!}{2!} = 1$

$= (1-q)^2 + 2q(1-q) = (1-q)[1-q+2q]$

$= (1-q)(1+q)$

$A = \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}(\mathbb{Z}) = \mathbb{P}(\mathbb{Z}\cap\text{supp}) = \mathbb{P}(\mathbb{Z}\cap\{0,1,2\})$

$= \mathbb{P}(\{0,1,2\}) = \mathbb{P}(\text{supp}) = 1.$

$\mathbb{P}(\mathbb{Q}) = ;$

- Οι πιθανότητες εξαρτώνται από το n $(=2)$ κ. το q. Γιατί;

Άσκηση. Επαναλάβετε τα παραπάνω για την περίπτωση $n=3, q=1/4$ ($Bin(3, 1/4)$).

Παρατηρήσεις: 1. Η $Bin(n,q)$ εξαρτάται από το διάνυσμα των παραμέτρων $\binom{n}{q}$. Για διαφορετικές τιμές αυτού του διανύσματος παίρνουμε μια διαφορετική διωνυμική κατανομή. Συνεπώς υπάρχουν τόσες διωνυμικές κατανομές όσες κ' οι διαφορετικές τιμές τις οποίες επιτρέπεται να λάβει το $\binom{n}{q}$. Άρα το παραπάνω περιγράφει επί της ουσίας την οικογένεια από διωνυμικές κατανομές.

2. Θέτοντας $n=1$, η $Bin(1,q)$ ορίζεται ως $supp = \{0,1\}$

$$\mathbb{P}(\{0\}) = \binom{1}{0} q^0 (1-q)^{1-0} = \frac{1!}{0!(1-0)!} 1-q = 1-q$$

$$\frac{1}{1\cdot 1} = 1$$

$$\mathbb{P}(\{1\}) = \binom{1}{1} q^1 (1-q)^{1-1} = \frac{1!}{1!(1-1)!} q = q.$$

$$\frac{1}{1\cdot 1} = 1$$

Δηλ. $Bin(1,q) = Ber(q)$

Συνεπώς η οικογένεια των Διωνυμικών εμπεριέχει ως υποοικογένεια τις Bernoulli για $n=1$.

Άσκηση. Τι θα συνέβαινε στα παραπάνω αν επιτρέπονταν τα $q=0$ ή $q=1$.

4. Κατανομή Poisson ως προς παράμετρο $\lambda>0$

$(Pois(\lambda))$

– $supp = \mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$

– $\mathbb{P}(\{i\}) = e^{-\lambda}\,\lambda^i / i!$, $i\in\mathbb{N}$

Περιγράφουν τα παραπάνω καλώς ορισμένη διακριτή κατανομή; Ελέγχουμε: i. το $supp=\mathbb{N}$ είναι διακριτό.

ii. $\mathbb{P}(\{i\}) = \underset{>0}{e^{-\lambda}}\, \dfrac{\lambda^i>0}{i!>0}$ $\forall i$, επειδή $\lambda>0$

Επομένως η πιθανότητα που αποδίδεται σε κάθε στοιχείο του supp είναι αυστηρά θετική.

iii. $\mathbb{P}(supp) = \mathbb{P}(\mathbb{N}) = \mathbb{P}(\{0,1,2,\dots\}) \underset{\text{αρ.προσθ.}}{=} \mathbb{P}(\{0\})+\mathbb{P}(\{1\})+$

σύνολο των φυσικών

$+\mathbb{P}(\{2\})+\dots+\mathbb{P}(\{n\})+\dots$

→ απειροστικές αθροίσματα

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{i\}) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} =$$

Απειροστικές αθροίσματα που στα μαθηματικά αναφέρεται παραγωγική σειρά.

↳ Μαθηματικά ΙΙΙ.

→ Χωρίς να εξηγούμε το γιατί, σε τέτοιου είδους αθροίσματα που θα συναντήσουμε σε αυτό το μάθημα θα μπορούμε να τα διαχειριζόμαστε αλγεβρικά όπως τα συνήθη πεπερασμένα αθροίσματα, π.χ. να βγάζουμε κοινούς παράγοντες.

$$= \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} + e^{-\lambda}\frac{\lambda^1}{1!} + e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!} + \dots + e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} + \dots$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!} \quad (*)$$

→ αρκεί να υπολογίσουμε αυτό.

$x=\lambda$

Ανάπτυγμα McLaurin της e^x

$$\boxed{e^x = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!} \quad \forall x\in\mathbb{R}}$$

→ Εξωγενές! Δεν χρειάζεται κάπου θα δίνεται!

Εξαιτίας του παραπάνω αναπτύγματος έχουμε (θέτουμε $x=\lambda$)

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!} = e^{\lambda} \quad \text{συνεπώς} \quad (*) = e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i/i! = e^{-\lambda}e^{\lambda}$$

$$= e^{-\lambda+\lambda} = e^0 = 1.$$

Επομένως έχουμε $\mathbb{P}(supp) = \dots = 1$ επομένως

Τα παραπάνω περιγράφουν μια καλώς ορισμένη διακριτή κατανομή που ονομάζεται κατανομή Poisson με παρ. λ.

...

[redacted]

Συνέχεια παραδείγματος κατ. Poisson: $\lambda>0$

α. $supp = \mathbb{N}$

β. $i\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\{i\}) = e^{-\lambda}\lambda^i/i!$ $\rightarrow$ Poiss(λ)

— Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα (Mc Laurin) $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} x^i/i!$ $\forall x\in\mathbb{R}$, είδαμε ότι τα α,β συγκροτούν καλώς ορισμένη διακριτή κατανομή στο $\mathbb{R}$ (Poiss(λ)).

Παραδείγματα υπολογισμού πιθανοτήτων για την Poiss(λ)

$\mathbb{P}(A)$:

— $A=(0,1)$, $\mathbb{P}((0,1)) = \mathbb{P}((0,1)\cap supp)$
$= \mathbb{P}((0,1)\cap\mathbb{N}) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

— $A=\{0,1\}$, $\mathbb{P}(\{0,1\}) = \mathbb{P}(\{0,1\}\cap supp)$
$= \mathbb{P}(\{0,1\}\cap\mathbb{N}) = \mathbb{P}(\{0,1\}) = \mathbb{P}(\{0\}\cup\{1\})$
$\overset{\text{προσθ.}}{=} \mathbb{P}(\{0\}) + \mathbb{P}(\{1\}) = e^{-\lambda}\underbrace{\frac{\lambda^0}{0!}}_{1} + e^{-\lambda}\underbrace{\frac{\lambda^1}{1!}}_{\lambda}$
$= e^{-\lambda}1 + e^{-\lambda}\lambda = e^{-\lambda}(1+\lambda)$

— $A=[0,1]$, $\mathbb{P}([0,1]) = \mathbb{P}([0,1]\cap supp) =$
$= \mathbb{P}([0,1]\cap\mathbb{N}) = \mathbb{P}(\{0,1\}) = \ldots = e^{-\lambda}(1+\lambda)$

— $A=\{x\in\mathbb{R} : x^2=1\} = \{-1,1\}$
$\mathbb{P}(\{x\in\mathbb{R}: x^2=1\}) = \mathbb{P}(\{-1,1\}\cap supp) =$
$= \mathbb{P}(\{-1,1\}\cap\mathbb{N}) = \mathbb{P}(\{1\}) = e^{-\lambda}\lambda^1/1! = e^{-\lambda}\cdot\lambda$

$- A = \mathbb{Z}$ σύνολο των ακεραίων

$$\mathbb{P}(\mathbb{Z}) = \mathbb{P}(\mathbb{Z} \cap supp) = \mathbb{P}(\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}) = \mathbb{P}(\mathbb{N}) = 1.$$

$\boxed{\mathbb{P}(\mathbb{Q}) = ;}$

Παρατήρηση: αν $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ με $\lambda_1 \neq \lambda_2$ έχουμε ότι $Poiss(\lambda_1) \neq Poiss(\lambda_2)$, οπότε έχουμε τόσες κατανομές Poisson όσες κ' οι διαφορετικές τιμές που μπορεί να πάρει το λ. Συνεπώς στο παράδειγμα δηλεύουμε με την οικογένεια από κατανομές Poisson.

Παρατήρηση: Είναι δυνατόν να χρησιμοποιήσουμε τα προηγούμενα παραδείγματα και αυτές τις τυχαίες μεταβλητές προκειμένου να κατασκευάσουμε περαιτέρω παραδείγματα διακριτών (φροντιστήριο)

Υπάρχουν κ' άλλα παραδείγματα διακριτών που δεν μπορούν να προκύψουν έτσι.

Υπενθύμιση — Ταξινόμηση των κατανομών βάσει των ιδιοτήτων του στηρίγματός τους:

α. Διακριτές — Το supp διακριτό (σύνολο περιγραφές)

β. Συνεχείς — Το supp έχει την μορφή διαστήματος ή ένωσης διαστημάτων (π.χ. ομοιόμορφη, εκθετική, κανονική κατανομή, κ.λπ.)

γ. Μεικτές — Το supp έχει ένα διακριτό μέρος κ' είναι ξένο ως προς το προηγούμενο συνεχές μέρος. (π.χ. το supp θα μπορούσε να είναι το $\underbrace{\{0\}}_{\text{διακριτό μέρος}} \cup \underbrace{[1,2]}_{\text{διάστημα}}$)

(Θα δούμε κάποια ενδεικτικά παραδείγματα μεικτών χωρίς να ασχοληθούμε με αυτές στην συνέχεια).

δ. Ιδιάζουσες κατανομές — το supp όποιας τέτοιας κατανομής δεν είναι ούτε διακριτό ούτε συνεχές ούτε μεικτό π.χ. supp = Cantor Set κ' η κατανομή Cantor (δείτε Wikipedia).

(Δεν θα ασχοληθούμε καθόλου με τέτοιου είδους κατανομές).

Οι b,σ,S δεν είναι "εύκολα" περιγράψιμες, και για να περιγραφούν θα μας χρειαστούν αναπαραστάσεις των κατανομών από πιο οικείες έννοιες. Θα δούμε τρεις αναπαραστάσεις:

i. Την αθροιστική συνάρτηση
ii. Την συνάρτηση πυκνότητας
iii. Την αντίληψη της κατανομής ως διαδικασίας ρουμήρωσης.

I. Αθροιστική Συνάρτηση (Cumulative Distribution Function - cdf)

- Ορίζεται για συνάρτηση $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Αν γνωρίζουμε την αθροιστική μπορούμε να βρίσκουμε τις πιθανότητες που αποδίδονται από την κατανομή, οπότε γνωρίζουμε την κατανομή.
- Υπάρχει και είναι μοναδική για κάθε κατανομή πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{μπορεί να ανήκει σε όποια κατηγορία}}$

Ορισμός: Έστω ότι $\mathbb{P}$ είναι κατανομή πιθανότητας επί του $\mathbb{R}$. Αθροιστική συνάρτηση της $\mathbb{P}$ ($F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) είναι αυτή που ορίζεται ως: $F(x) := \mathbb{P}((-\infty, x])$,

ορισμός

για όποιο $x \in \mathbb{R}$.

Παρατήρηση: αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}((-\infty, x]) \in \mathbb{R}$ η F είναι πάντοτε καλώς ορισμένη ως πραγματική συνάρτηση.

Παραδείγματα:

1. Εκφυλισμένη κατανομή στο 0: $\quad supp = \{0\}$, $\quad \mathbb{P}(\{0\}) = 1$

Ποια είναι η F της εκφυλισμένης κατανομής;

Έχουμε ότι αν $x \in \mathbb{R}$, πρέπει να υπολογίσουμε το $\mathbb{P}((-\infty, x])$ ως προς αυτή την κατανομή,

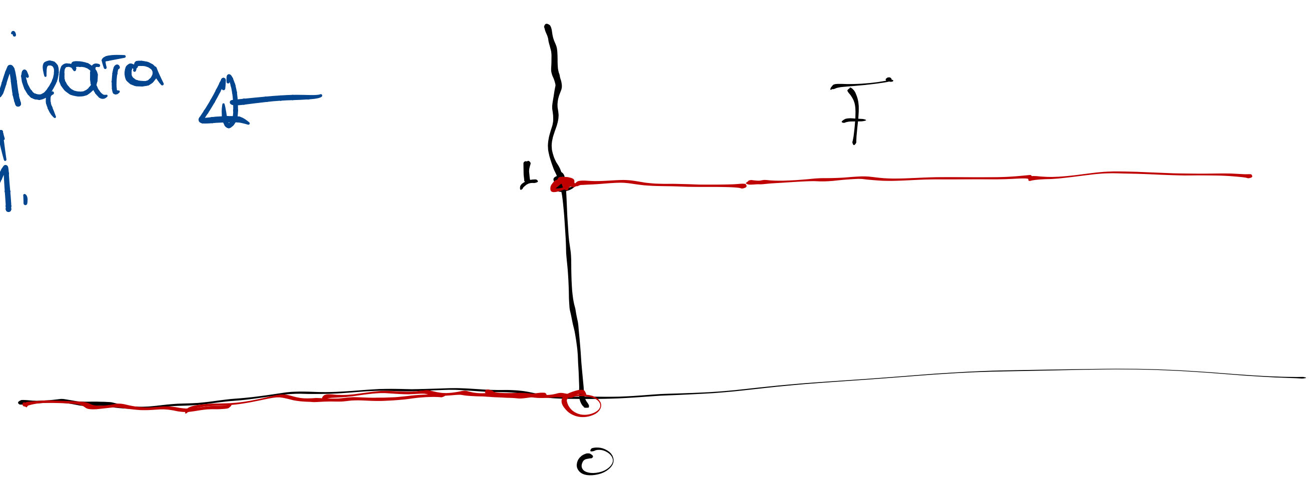
Οπότε $(-\infty, x] \cap \text{supp} = (-\infty, x] \cap \{0\} = \begin{cases} \emptyset, & x<0 \\ \{0\}, & x \geq 0 \end{cases}$

συνεπώς

$$F(x) = \mathbb{P}((-\infty, x]) = \begin{cases} \mathbb{P}(\emptyset), & x<0 \\ \mathbb{P}(\{0\}), & x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

και το γράφημα αυτής είναι το

κατά τμήματα σταθερή.



2. Bernoulli με παράμετρο $q \in (0,1)$: $\text{supp} = \{0,1\}$, $\mathbb{P}(\{0\}) = 1-q$, $\mathbb{P}(\{1\}) = q$

Ποιά είναι η F της συγκεκριμένης κατανομής;

Έστω $x \in \mathbb{R}$, θα πρέπει να βρούμε την $\mathbb{P}((-\infty, x])$

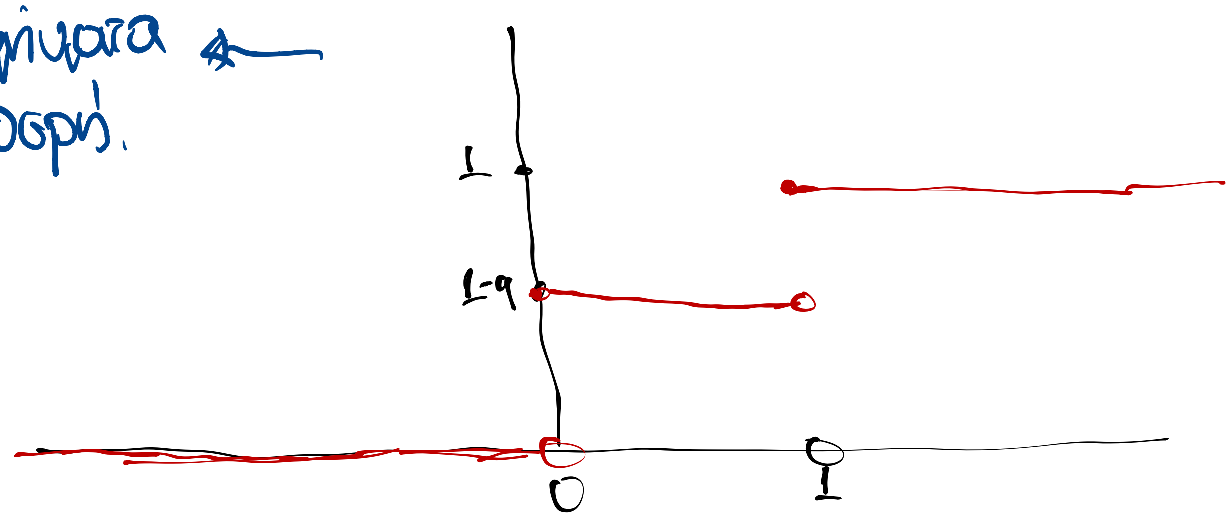
Έχουμε ότι $(-\infty, x] \cap \text{supp} = (-\infty, x] \cap \{0,1\} =$

$$\begin{cases} \emptyset, & x<0 \\ \{0\}, & 0 \leq x < 1 \\ \{0,1\}, & x \geq 1 \end{cases}$$

Επομένως: $F(x) = \mathbb{P}((-\infty, x]) = \begin{cases} \mathbb{P}(\emptyset), & x<0 \\ \mathbb{P}(\{0\}), & 0\le x<1 \\ \mathbb{P}(\{0,1\}), & x\ge 1 \end{cases}$

$$= \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-q, & 0\le x<1 \\ 1, & x\ge 1 \end{cases}$$

Κατά τμήματα σταθερή.



Στο φροντιστήριο θα δούμε τις αθροιστικές συναρτήσεις για την διωνυμική και την Poisson.

Αύριο θα δούμε τις χαρακτηριστικές ιδιότητες της F και το γιατί η F αναπαριστά την $\mathbb{P}$ αυτής.