Διαλέξεις 7-8

- κατανομές επί του $\mathbb{R}$:
  * Απλό παράδειγμα
  * Προεργασία – Στήριγμα
  * Ταξινόμηση
  * Διακριτές κατανομές

Εισαγωγή: Κατανομές πιθανότητας επί του $\mathbb{R}$

(κάποιες αρχικές παρατηρήσεις)

Η ανάλυση των ιδιοτήτων των κατανομών πιθανότητας επί των πραγματικών είναι σημαντική επειδή, σε αυτούς, ή σε "παρεμφερείς" χώρους, είναι συνήθως ορισμένες οι κατανομές που αφορούν την Οικονομική Θεωρία και την Οικονομετρία, και επίσης επειδή μέσω της έννοιας της τυχαίας μεταβλητής είναι δυνατή η "μεταφορά" κατανομών από αυθαίρετους χώρους στην πραγματική ευθεία η οποία έχει πλούσια μαθηματική δομή, και συνεπώς η μελέτη τους εκεί.

▶ Την έννοια της τυχαίας μεταβλητής θα δούμε στο φροντιστήριο.

Από τα προηγούμενα γνωρίζουμε ότι τόσο στην πραγματική ευθεία, αλλά και γενικότερα σε περιπτώσεις που η συλλογή από τα σχετικά μετρήσιμα υποσύνολα είναι "περίπλοκη" τότε γενικά είναι δυσχερής η χρήση του ορισμού για την περιγραφή κατανομής πιθανότητας. Επομένως μας χρειάζονται έννοιες που είναι δυνατόν να αναπαριστούν μια κατανομή αποφεύγοντας τον ορισμό, και οι οποίες είναι επίσης "οικείες" (π.χ. συναρτήσεις από το στο) και "εύχρηστες". Προκύπτει επίσης το ερώτημα του πως είναι δυνατόν οι ιδιότητες της κατανομής να αντανακλώνται σε τυχόν "οικείες αναλυτικές" ιδιότητες όποιας τέτοιας αναπαράστασης. Θα ασχοληθούμε με αυτά τα ερωτήματα σε σημαντικό μέρος του μαθήματος.

▶ Το πεδίο ορισμού οποιας κατανομής πιθανότητας επί του $\mathbb{R}$, θα είναι η συλλογή από τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ στα οποία είναι εφικτή η απόδοση πιθανοτήτων. Στις σημειώσεις το συμβολίζουμε με $\Sigma_{\mathbb{R}}$ αλλά δεν το έχουμε περιγράψει με ακρίβεια. Ξέρουμε ότι μπορεί να επιλεγεί ώστε να περιλαμβάνει τα $\emptyset$, $\mathbb{R}$, όπως και τα "οικεία" σε εμάς υποσύνολα του $\mathbb{R}$, π.χ. διαστήματα, $\{c\}, c\in\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, ..., και ότι θα έχει άπειρο πλήθος στοιχείων $\Rightarrow$

Αν είναι εύκολο να περιγράφουμε γενικά κατανομές πιθανότητας επί του $\mathbb{R}$, περιγράφοντας το τι τιμές αποδίδουν σε κάθε στοιχείο της συλλογής· μου χρειάζονται βοηθητικές νέες έννοιες.

▶ Μήπως υπάρχουν όμως κατανομές επί των πραγματικών που μπορούν να περιγραφούν χωρίς την χρήση βοηθητικών εννοιών;

π.χ. $A=\mathbb{R}$, $0\in\mathbb{R} \Rightarrow Q(\mathbb{R})=1$

$A=(0,1)$, $0\notin\mathbb{R} \Rightarrow Q((0,1))=0$

$A=\mathbb{N}$, $0\in\mathbb{N} \Rightarrow Q(\mathbb{N})=1$

$A=\{1,2,10^8\}$, $0\notin A$

$Q(\{1,2,10^8\})=0$ κ.ο.κ.

Ας δούμε ένα παράδειγμα:

Έστω η $Q : \Sigma_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ → πραγματική συνάρτηση επί του $\mathbb{R}$

↳ συλλογή από τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ στα οποία μπορούμε να αποδίδουμε πιθανότητες

Που ορίζεται ως εξής:

$$\text{αν } A\in\Sigma_{\mathbb{R}},\quad Q(A)=\begin{cases}1, & 0\in A\\ 0, & 0\notin A\end{cases}$$

→ Ελέγχει εάν το 0 βρίσκεται στο A: αν ναι αποδίδει 1, αν όχι αποδίδει 0 (εύκολη περιγραφή μέσω πεπερασμένου πλήθους συνθηκών)

Μήπως η Q είναι κατανομή πιθανότητας επί του $\mathbb{R}$;

Για να είναι θα πρέπει να ικανοποιεί τις i. θετικότητα, ii. τυποποίηση και iii. την σ-αθροιστικότητα ή "μετρήσιμου πλήθους" προσθετικότητα.

$Q(A) = 0$ ή 1

Το i είναι προφανές. Επειδή $0 \in \mathbb{R}$, $Q(\mathbb{R}) = 1$ άρα ισχύει το ii. Για το iii έχουμε το εξής: έστω $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ [με $A_i \cap A_j = \emptyset$ όταν $i \neq j$]

όχι πλήθος μεγαλύτερο των φυσικών

Τι σχέση έχει $Q(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots)$ (α)

με $Q(A_1) + Q(A_2) + \ldots + Q(A_n) + \ldots$ (β)

Α. Έστω ότι το $0 \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$ (=1)

Ο ανήκει σε ένα και μοναδικό από τους παράγοντες αυτής της ένωσης, έστω στο A_i για κάποιο i.

Οπότε $0 \notin A_j$ $\forall j \neq i$.

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι

$$Q(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots) = 1$$

Ταυτόχρονα έχουμε $Q(A_i) = 1$, ενώ $Q(A_j) = 0$ $\forall j \neq i$

$$1 = Q(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots)$$

$$1 = \underbrace{Q(A_1)}_{0} + \underbrace{Q(A_2)}_{0} + \ldots + \underbrace{Q(A_i)}_{1} + \ldots + \underbrace{Q(A_n)}_{0} + \ldots$$

Β. Έστω ότι $0 \notin A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$ (=1)

$0 \notin A_1$ κ' $0 \notin A_2$ κ' $0 \notin A_3$ κ... $0 \notin A_n \ldots$

Οπότε τότε $Q(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots) = 0$

$$Q(A_1) + Q(A_2) + \ldots + Q(A_n) + \ldots = 0$$

$$Q(A_1) = 0,\quad Q(A_2) = 0,\quad Q(A_n) = 0$$

Επομένως ισχύει η iii αφού σε κάθε περίπτωση έχουμε ότι $Q(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots) =$
$Q(A_1) + Q(A_2) + \ldots + Q(A_n) + \ldots$

Συνεπώς πράγματι η Q είναι μια καλώς ορισμένη κατανομή πιθανότητας επί του $\mathbb{R}$.

Ευκολία περιγραφής: υπολογισμός βάσει πεπερασμένου πλήθους συνόλων

Συνεπώς έχουμε παράδειγμα κατανομής πιθανότητας επί του $\mathbb{R}$ (συνεπώς μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι υπάρχουν τέτοιες κατανομές) και παρατηρούμε ότι κάποιες από αυτές μπορεί να είναι δυνατόν να περιγράφονται "εύκολα" (δηλ. χωρίς την ανάγκη εισαγωγής νέων εννοιών).

Κεφάλαιο Β. Κατανομές Πιθανότητας επί του $\mathbb{R}$ (Καθεαυτό έννοιες)

— Προκειμένου να μελετούμε τέτοιες κατανομές θα χρειαστεί να ορίσουμε έννοιες οικειότερες σε εμάς που μας επιτρέπουν να αναπαριστούμε κατανομές πιθανότητας αποφεύγοντας τα παραπάνω. Έτσι π.χ. θα δούμε τις έννοιες της αθροιστικής συνάρτησης ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$), της αναπαράστασης κατανομής ως ολοκλήρωμα, κ.λ.π. Περιμένουμε ότι ιδιότητες των κατανομών που έχουμε ήδη μελετήσει γενικά (π.χ. μονοτονία) θα αναπαριστώνται σε "παρεμφερείς" ιδιότητες των αναπαραστάσεων (π.χ. θα δούμε ότι οι αθροιστικές συναρτήσεις είναι αύξουσες).

- Είδαμε ότι υπάρχουν κατανομές πιθανότητας επί του $\mathbb{R}$ που μπορούν να περιγραφούν χωρίς να χρειάζονται περαιτέρω έννοιες. Γιατί συμβαίνει κάτι τέτοιο; *

Ξεκινάμε την μελέτη μας εισάγοντας την έννοια του στηρίγματος μιας κατανομής πιθανότητας επί του $\mathbb{R}$.

Η έννοια αυτή θα μας βοηθήσει: [Σχετίζεται άμεσα με την έννοια του συνόλου πλήρους πιθανότητας.]

α. στο να κατηγοριοποιήσουμε τις κατανομές ώστε να διευκολύνουμε την μελέτη τους.

β. θα διευκολύνει στον υπολογισμό πιθανοτήτων που αποδίδει η εκάστοτε κατανομή σε κάποιες τουλάχιστον περιπτώσεις.

(θα μας βοηθήσει στο να απαντήσουμε στο *)

Προκειμένου να ορίσουμε την έννοια του στηρίγματος μας χρειάζεται μια μικρή προεργασία που θα αφορά:

α. Το πότε το $A \subseteq \mathbb{R}$ θα ονομάζεται κλειστό

β. Το πότε το $A \subseteq \mathbb{R}$ θα ονομάζεται διακριτό (κ.ο.κ.);

[redacted] Όπως είπαμε προηγουμένως:

1. Θα ασχοληθούμε με την έννοια του στηρίγματος κατανομής πιθανότητας επί των πραγματικών:

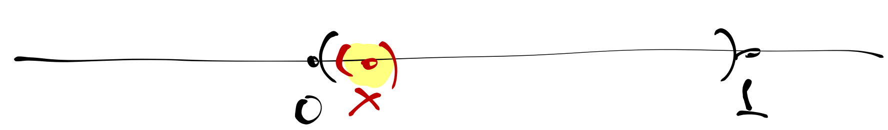
   α. Θα μας βοηθήσει στο να ταξινομήσουμε τις κατανομές επί του $\mathbb{R}$ (δυνάμεθα να καταλάβουμε ποιες από αυτές περιγράφονται "εύκολα".

   β. Θα μας βοηθήσει σε κάποιες περιπτώσεις στον υπολογισμό πιθανοτήτων.

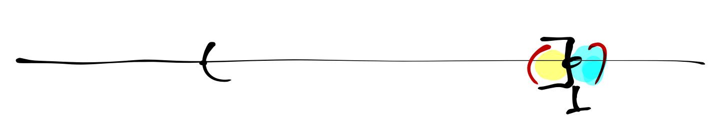
Προεργασία:

1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, αυτό θα ονομάζεται ανοικτό (open) αν $\forall x \in A$ υπάρχει ανοικτό διάστημα με κέντρο το x τέτοιο ώστε να εμπεριέχεται όλο μέσα στο A.

Π.χ. $A = (0,1)$ ανοικτό.



Αντιπαράδειγμα $A = (0,1]$ δεν είναι ανοικτό.



Προφανή παραδείγματα ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ είναι το $\emptyset$, $\mathbb{R}$, τα ανοικτά διαστήματα, κ.ο.κ.

Δυϊκά, το $A \subseteq \mathbb{R}$ θα ονομάζεται **κλειστό** (closed) αν το A' είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

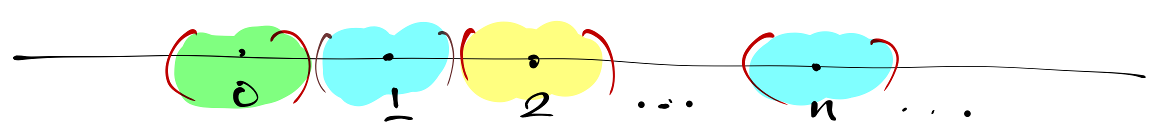
ΠΡΟΣΟΧΗ: ΥΠΑΡΧΟΥΝ A ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ Κ' ΑΝΟΙΚΤΑ Κ' ΚΛΕΙΣΤΑ. Π.Χ. $\mathbb{R}$

Προφανή παραδείγματα κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ είναι το $\mathbb{R}$, το $\emptyset$, τα κλειστά διαστήματα, τα πεπερασμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$, κ.ο.κ.

ΠΡΟΣΟΧΗ: ΥΠΑΡΧΟΥΝ A ΠΟΥ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΟΥΤΕ ΑΝΟΙΚΤΑ ΟΥΤΕ ΚΛΕΙΣΤΑ Π.Χ. $(0,1]$

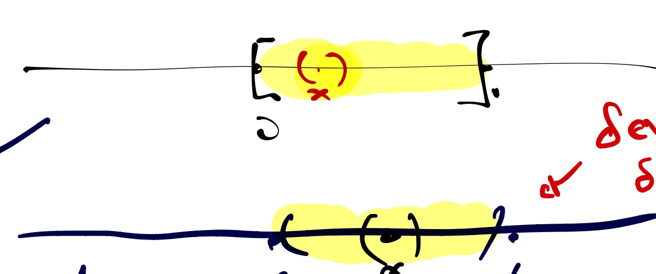
2. Το $A \subseteq \mathbb{R}$ θα ονομάζεται διακριτό (discrete) αν αποτελείται από απομονωμένους μεταξύ τους πραγματικούς αριθμούς, δηλ. $\forall x \in A$ υπάρχει ανοικτό διάστημα με κέντρο το x, που περιλαμβάνει μόνο το x και κανένα άλλο στοιχείο του A.

Π.χ. $A = \mathbb{N}$



Είναι διακριτό γιατί κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να "απομονωθεί" από τους υπόλοιπους μέσω ανοικτού διαστήματος.

Αντιπαράδειγμα $A = [0,1]$



δεν είναι διακριτό.

δεν είναι διακριτό

$A = (0,1)$

Προφανή παραδείγματα διακριτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ είναι το $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, τα πεπερασμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$, κ.ο.κ.

Αντιπαραδείγματα: τα διαστήματα.

Παρατήρηση: Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι κάθε διακριτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι κλειστό, και έχει "μικρό" πλήθος στοιχείων (δηλ. είναι πεπερασμένο

ή έχει πλήθος ίσο με το πλήθος των φυσικών).
Το πολύ

Τέλος Διάλεξης 7

⊛ Στήριγμα - Support

$\mathbb{P}(supp) = 1$
$\Leftrightarrow \mathbb{P}(supp') = 0$

Ορισμός Έστω $\mathbb{P}$ κατανομή πιθανότητας επί του $\mathbb{R}$.
Στήριγμα της $\mathbb{P}$ (support - supp) θα αναφέρεται το μικρότερο κλειστό και μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο η $\mathbb{P}$ αποδίδει μοναδιαία πιθανότητα (δηλ. θα είναι σύνολο πλήρους πιθανότητας για την $\mathbb{P}$)

Διευκρίνιση: ο προσδιορισμός "μικρότερο" θα σημαίνει το εξής: αν το $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$, το A κλειστό, το $A \subset supp$, $\mathbb{P}(A) < 1$.

↳ δηλ. Το supp είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο πλήρους πιθανότητας για την $\mathbb{P}$.

Παρατήρηση: Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι για κάθε κατανομή πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ το στήριγμα της είναι καλώς ορισμένο και μοναδικό.

Σημασία του στηρίγματος:

α. Μπορεί να είναι διευκολυντικό στον υπολογισμό πιθανοτήτων.

Έστω η $\mathbb{P}$ κατανομή στο $\mathbb{R}$, με στήριγμα το supp, και έστω $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$, και θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα που η $\mathbb{P}$ αποδίδει στο A:

Συλλογή από τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ στα οποία μπορεί να αποδοθεί πιθανότητα

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap supp) + \underbrace{\mathbb{P}(A \cap supp')}_{=0 \text{ ισχύει;}} \quad (*) \quad [\text{μετρησιμότητα}]$$

$(\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B'))$ ✓

$$A\cap supp' \subseteq supp' \Rightarrow P(A\cap supp') \le P(supp') = 0$$

γιατ.

$$= 1 - P(supp) = 1 - 1 = 0$$

χρήση μονοτονίας

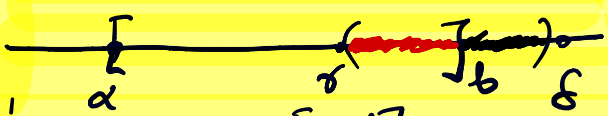
$$\Gamma \subseteq \Delta \Rightarrow P(\Gamma) \le P(\Delta)$$

$$\Rightarrow P(A\cap supp') = 0 \quad \text{οπότε}$$

$$(*) \Rightarrow P(A) = P(A\cap supp)$$

μπορεί να διευκολύνει στους υπολογισμούς.

π.χ.



Έστω $supp = [\alpha, \beta]$

$A = (\gamma, \delta)$

$A\cap supp = (\gamma, \beta]$, $A\cap supp' = (\beta, \delta)$, $P((\gamma,\delta)) = P((\gamma, \beta])$

β. Μας βοηθάει να ταξινομήσουμε τις κατανομές επί των πραγματικών αριθμών βάσει των ιδιοτήτων των στηριγμάτων τους ως εξής:

- Το supp είναι διακριτό ← α. διακριτές κατανομές → εύκολα περιγράψιμες
- Το supp έχει την μορφή διαστήματος ή ένωσης διαστημάτων ← β. συνεχείς κατανομές
- Το supp έχει διακριτό μέρος & μέρος με την μορφή διαστήματος π.χ. $\{0\}\cup[1,2]$ ← γ. μεικτές κατανομές
- δ. ιδιάζουσες κατανομές. → το supp είναι περίπλοκο: δεν θα ασχοληθούμε.

(β, γ, δ) → για να τις περιγράψουμε χρειαζόμαστε βοηθητικές έννοιες

α. Διακριτές κατανομές (Discrete Distributions)

Ορισμός Έστω P κατανομή πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Αυτή θα ονομάζεται διακριτή αν το supp αυτής είναι διακριτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Θα δούμε αμέσως ότι οι διακριτές κατανομές είναι αυτές που περιγράφονται "εύκολα" χωρίς να υπάρχει η ανάγκη ανάπτυξης περαιτέρω εννοιών.

Αυτό συμβαίνει εξαιτίας του εξής: Έστω η $\mathbb{P}$ διακριτή επομένως το supp αυτής διακριτό, δηλ. έχει την εξής μορφή $\text{supp} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$

"απομονωμένοι πραγματικοί"

→ μπορεί να είναι και απαριθμήσιμο

Έστω $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$, οπότε έχουμε

από προηγουμένως

$= (A \cap \{x_1\}) \cup (A \cap \{x_2\}) \cup \dots \cup (A \cap \{x_n\}) \cup \dots$

ανά δύο ξένα μεταξύ τους

η $\mathbb{P}$ διακριτή

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap \text{supp}) = \mathbb{P}(A \cap \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\})$$

βλ. παραπάνω

$$= \mathbb{P}(A \cap \{x_1\}) + \mathbb{P}(A \cap \{x_2\}) + \dots + \mathbb{P}(A \cap \{x_n\}) + \dots$$

αριθμ. προσθ.

Έχουμε επίσης ότι αν $x_i \in \text{supp}$ τότε

$$\mathbb{P}(A \cap \{x_i\}) = \begin{cases} \mathbb{P}(\emptyset), & x_i \notin A \\ \mathbb{P}(\{x_i\}), & x_i \in A \end{cases} = \begin{cases} 0, & x_i \notin A \\ \mathbb{P}(\{x_i\}), & x_i \in A \end{cases}$$

Θα δούμε ότι επειδή η $\mathbb{P}$ διακριτή τότε $\mathbb{P}(\{x_i\}) > 0$, $\forall x_i \in \text{supp}$

τι συμβαίνει με αυτή την πιθ.;

Τέλος Διάλεξης 8

Το επόμενο αποτέλεσμα χαρακτηρίζει πλήρως το τι συμβαίνει με αυτές τις πιθανότητες:

[redacted]

Λήμμα. Αν η $\mathbb{P}$ διακριτή και το $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(\{x\})>0$ ανν $x \in supp$.

Απόδειξη: Έχουμε να δείξουμε τα

α. αν $\mathbb{P}(\{x\})>0$ τότε $x \in supp$, και

β. αν $x \in supp$ τότε $\mathbb{P}(\{x\})>0$

Για το α έχουμε: ισοδυνάμως αρκεί να δείξουμε ότι αν $x \notin supp$ τότε $\mathbb{P}(\{x\})=0$. Έχουμε ότι

$$\text{αν } x \notin supp \Leftrightarrow x \in supp' \Leftrightarrow \{x\} \subseteq supp' \underset{\text{μον.}}{\Rightarrow}$$
$$\mathbb{P}(\{x\}) \leq \mathbb{P}(supp')=0 \Rightarrow \mathbb{P}(\{x\})=0.$$

(Στο παραπάνω δεν χρησιμοποιήθηκε πουθενά ότι η $\mathbb{P}$ είναι διακριτή - ισχύει για όποια κατανομή πιθανότητας)

β. Χρησιμοποιούμε απαγωγή σε άτοπο. Έστω χωρίς απώλεια γενικότητας ότι στο $x_1 \in supp$ έχουμε ότι $\mathbb{P}(\{x_1\})=0$.

Θεωρούμε το $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} - \{x_1\} = supp - \{x_1\} = \{x_2, \dots, x_n, \dots\}$

Το $supp - \{x_1\}$ είναι επίσης διακριτό. Συνεπώς είναι μετρήσιμο. Επίσης $supp - \{x_1\} \subset supp$. Υπολογίζουμε την

$$\mathbb{P}(supp - \{x_1\}) = \mathbb{P}(supp) - \mathbb{P}(\{x_1\}) = 1 - 0 = 1$$

$A \supseteq B$ $\mathbb{P}(A-B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$

$A = supp$ $B = \{x_1\}$

Άρα η υπόθεση $\mathbb{P}(\{x_1\})=0$ μας οδηγεί στο

$$\mathbb{P}(supp-\{x_1\})=1.$$

Αλλά είδαμε ότι το $supp-\{x_1\}$ είναι κλειστό, και $supp-\{x_1\} \subset supp$. Άρα έχουμε βρει κλειστό γνήσιο υποσύνολο του supp στο οποίο η $\mathbb{P}$ αποδίδει μοναδιαία πιθανότητα. Αυτό είναι άτοπο επειδή το supp εξ' ορισμού είναι το μικρότερο κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο η $\mathbb{P}$ αποδίδει πιθανότητα 1. Άρα $\mathbb{P}(\{x_1\})>0$. Επειδή το x_1 το επιλέξαμε χωρίς απώλεια γενικότητας αυτό θα ισχύει για κάθε στοιχείο του supp. □

[Το β. δεν ισχύει γενικά για κατανομές που δεν είναι διακριτές. Θα δούμε παραδείγματα κατανομών που δεν είναι διακριτές και οι οποίες είτε σε κάποια είτε σε κάθε στοιχείο του στηρίγματος τους αποδίδουν μηδενική πιθανότητα].

Συνεπώς για να περιγράψω μια διακριτή κατανομή αρκεί να γνωρίζω:

α. Το supp, και

β. η πιθανότητα που αποδίδεται σε κάθε στοιχείο του supp.

Επομένως για να ελέγξω το αν μια περιγραφή διακριτής κατανομής που βασίζεται στα α, β είναι καλώς ορισμένη αρκεί να ελέγξω i. αν το supp είναι διακριτό, ii. το αν η πιθανότητα που αποδίδεται σε κάθε στοιχείο του στηρίγματος είναι αυστηρά θετική, και iii. το αν $\mathbb{P}(supp)=1$.

Βάσει της παραπάνω διαδικασίας μπορούμε να ξεκινήσουμε να βλέπουμε παραδείγματα διακριτών κατανομών.

Παραδείγματα Διακριτών κατανομών.

Στα παραδείγματα το στήριγμα θα μεγαλώνεται.

1. Εκφυλισμένη κατανομή στο 0.

Πρόκειται για την κατανομή που ορίζεται από τα:

α. $supp = \{0\}$

β. $\mathbb{P}(\{0\}) = 1$

i. Το στήριγμα διακριτό αφού είναι πεπερασμένο. ii. $\mathbb{P}(\{0\}) = 1 > 0$ επομένως σε κάθε στοιχείο του στηρίγματος αποδίδεται αυστηρά θετική πιθανότητα. iii $\mathbb{P}(supp) = \mathbb{P}(\{0\}) = 1$.

Άρα το παραπάνω προσδιορίζει μια καλώς ορισμένη διακριτή κατανομή που ονομάζεται εκφυλισμένη κατανομή στο 0.

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα που αποδίδει η εκφυλισμένη κατανομή σε όποιο $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ θα έχουμε

το $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap supp) = \mathbb{P}(A \cap \{0\}) = \begin{cases} \mathbb{P}(\emptyset), & 0 \notin A \\ \mathbb{P}(\{0\}), & 0 \in A \end{cases} = \begin{cases} 0, & 0 \notin A \\ 1, & 0 \in A \end{cases}$

(αυτή είναι η $\mathbb{Q}$ που είδαμε σε προηγούμενες διαλέξεις).

[redacted]

(Συνέχεια παραδείγματος εκφυλισμένης κατανομής στο 0)

Υπενθύμιση
— $\mathrm{supp} = \{0\}$ ✓
— $\mathbb{P}(\{0\}) = 1$ ✓

— αν $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ τότε $\boxed{\mathbb{P}(A) = \begin{cases} 0, & 0 \notin A \\ 1, & 0 \in A \end{cases}}$

π.χ. $A = (0,1)$, $\mathbb{P}((0,1)) \overset{0 \notin (0,1)}{=} 0$ $\quad A = \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\mathbb{N}) \overset{0 \in \mathbb{N}}{=} 1$

$A = [0,1]$, $\mathbb{P}([0,1]) \overset{0 \in [0,1]}{=} 1$ $\quad A = \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\mathbb{N}^*) \overset{0 \notin}{=} 0$

$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$

$A = [0,1)$, $\mathbb{P}([0,1)) \overset{0 \in [0,1)}{=} 1$,

$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 2\} = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \not\ni 0$

$\mathbb{P}(\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 2\}) = 0$

— Είναι δυνατόν να οριστούν άλλες κατανομές με $\mathrm{supp} = \{0\}$

Επειδή θα πρέπει $\mathbb{P}(\{0\}) = 1$, η μοναδική κατανομή με αυτό το στήριγμα είναι η παραπάνω.

Προσπαθήστε ως άσκηση: αν $x \in \mathbb{R}$, να ορίσετε την εκφυλισμένη κατανομή στο x. (Είναι δυνατόν να δειχθεί ότι για κάθε x, η εκφυλισμένη κατανομή στο x είναι δυνατόν να παραχθεί από την εκφυλισμένη στο μηδέν κ' κατάλληλης τυχαίας μεταβλητής — φροντιστήριο!).

2. Κατανομή Bernoulli με παράμετρο $q \in (0,1)$

($Ber(q)$)

- $supp = \{0,1\}$ → δύο στοιχεία
- $\mathbb{P}(\{0\}) = 1-q$, $\mathbb{P}(\{1\}) = q$

Είναι το παραπάνω καλώς ορισμένο;

i. το στήριγμα που έχει δοθεί είναι πεπερασμένο, άρα διακριτό. ii. $\mathbb{P}(\{0\})>0$, $q\neq 1$, $\mathbb{P}(\{1\})>0$, $q\neq 0$.

iii. $\mathbb{P}(supp) = \mathbb{P}(\{0,1\}) = \mathbb{P}(\{0\})+\mathbb{P}(\{1\}) = 1-q+q = 1$.

Συνεπώς το παραπάνω ορίζει μια καλώς ορισμένη διακριτή κατανομή επί του $\mathbb{R}$, που ονομάζεται Bernoulli με παράμετρο q.

Αν $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$, ποιό είναι $\mathbb{P}(A)$ για την $Ber(q)$;

υπολογιστικά πεπερασμένος τύπος συνάρτησης

Έχουμε ότι

$$A \cap supp = A \cap \{0,1\} = \begin{cases} \emptyset, & 0,1 \notin A \\ \{0\}, & 0\in A, 1\notin A \\ \{1\}, & 0\notin A, 1\in A \\ \{0,1\}, & 0,1 \in A \end{cases}$$

Οπότε

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap \{0,1\}) = \begin{cases} \mathbb{P}(\emptyset), & 0,1 \notin A \\ \mathbb{P}(\{0\}), & 0\in A, 1\notin A \\ \mathbb{P}(\{1\}), & 0\notin A, 1\in A \\ \mathbb{P}(\{0,1\}), & 0,1 \in A \end{cases} = \begin{cases} 0, & 0,1 \notin A \\ 1-q, & 0\in A, 1\notin A \\ q, & 0\notin A, 1\in A \\ 1, & 0,1 \in A \end{cases}$$

π.χ. $A=(0,1)$, $\mathbb{P}((0,1)) \overset{0,1\notin A}{=} 0$ $\qquad$ $A=(0,1]$, $\mathbb{P}((0,1]) \overset{0\notin A, 1\in A}{=} q$

$A=[0,1]$, $\mathbb{P}([0,1]) \overset{0,1\in A}{=} 1$ $\qquad$ $A=\mathbb{Z}$, $\mathbb{P}(\mathbb{Z}) \overset{0,1\in A}{=} 1$

$A=[0,1)$, $\mathbb{P}([0,1)) \overset{0\in A, 1\notin A}{=} 1-q$

$\mathbb{Z}$ " σύνολο των ακεραίων

$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$, $\mathbb{P}(\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\}) \overset{0 \notin A, 1 \in A}{=} 0$, κ.ο.κ.

- Αν $q_1, q_2 \in (0,1)$, $q_1 \neq q_2$, $Ber(q_1) \neq Ber(q_2)$

Επειδή για την $Ber(q_1)$ έχουμε $\mathbb{P}(\{0\}) = q_1$

για την $Ber(q_2)$ » $\mathbb{P}(\{0\}) = q_2$

Δηλ. κάθε διαφορετική τιμή του q προσδιορίζει μοναδικά μία διαφορετική κατανομή Bernoulli. Δηλ. έχουμε τόσες κατανομές Bernoulli όσες και οι τιμές που μπορεί να πάρει το q. Δηλ. έχουμε τόσες κατανομές Bernoulli όσα κ' τα στοιχεία $(0,1)$.

Συνεπώς σε αυτό το παράδειγμα έχουμε περιγράψει μία ολόκληρη οικογένεια από κατανομές που "περιγράφονται" από την παράμετρο q.

- Τι θα συνέβαινε αν επιτρέπαμε $q=0$ ή/και $q=1$; (Άσκηση)

3. Διωνυμική Κατανομή με παραμέτρους $n \in \mathbb{N}^*$, $q \in (0,1)$ (Binomial distribution) - $Bin(n,q)$

- $supp = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ → $n+1$ στοιχεία

Υπενθύμιση: $! : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

αν $i \in \mathbb{N}$ $i! = \begin{cases} 1, & i = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots i, & i > 0 \end{cases}$

$$\binom{n}{i} := \frac{n!}{i!\,(n-i)!}$$

↳ πλήθος συνδυασμών n ως προς i, $i, n \in \mathbb{N}$, $i \le n$

— $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(\{i\}) := \binom{n}{i} q^i (1-q)^{n-i}$

π.χ. $\mathbb{P}(\{0\}) = \binom{n}{0} q^0 (1-q)^{n-0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!}(1-q)^n = \frac{n!}{n!}(1-q)^n = (1-q)^n$

π.χ. $\mathbb{P}(\{n\}) = \binom{n}{n} q^n (1-q)^{n-n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} q^n (1-q)^0 = q^n$

Το προηγούμενο περιγράφει καλώς ορισμένη διακριτή κατανομή;

i. Το supp είναι πεπερασμένο άρα διακριτό. ii.

Επειδή $q \neq 0$, $q \neq 1$, $\binom{n}{i} q^i (1-q)^{n-i} > 0$ $\forall i = 0, 1, \dots, n$

Συνεπώς $\forall i = 0, 1, \dots, n$ $\mathbb{P}(\{i\}) > 0$.

iii. $\mathbb{P}(\text{supp}) = \mathbb{P}(\{0, 1, 2, \dots, n\}) = \mathbb{P}(\{0\}) + \mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) + \dots + \mathbb{P}(\{n\}) =$

$$= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(\{i\}) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} q^i (1-q)^{n-i} \overset{;}{=} 1$$

↳ πώς θα το υπολογίσουμε;

(Διωνυμικό ανάπτυγμα - Binomial Expansion)

θα μας χρειαστεί!

Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\alpha+\beta)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \alpha^i \beta^{n-i}$