Διαλέξεις 5-6 - Συμπληρωματική ασύγχρονη

- Ορισμός κατανομής πιθανότητας (επί του Ω)
- Ιδιότητες
- Σχόλια
- Παραδείγματα

Μπορούμε (επιτέλους!) να εξετάσουμε για όχι απολύτως ακριβή εκδοχή του ορισμού της κατανομής πιθανότητας.

▶ Κατανομές (ή μέτρα) πιθανότητας επί του Ω

Ορισμός. Κατανομή (ή μέτρο πιθανότητας – probability distribution/measure) επί του Ω θα ονομάζεται οποιαδήποτε πραγματική συνολοσυνάρτηση

$$\mathbb{P} : 2^{\Omega} \to \mathbb{R}$$

ή κατάλληλη υποσυλλογή από υποσύνολα του Ω στα οποία θέλουμε κ' μπορούμε να αποδίδουμε πιθανότητες

μας είναι αδύνατο να καταλάβουμε αυτό το θέμα σε βάθος – θα το εξετάσουμε περιορισμένα στην συνέχεια

που ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

α. $\forall A \in 2^{\Omega}$, $\mathbb{P}(A) \geq 0$ (θετικά ορισμένη)

β. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (τυποποίηση) γ. $\forall A, B \in 2^{\Omega}$, με $A \cap B = \emptyset$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

(προσθετικότητα)

Δηλ. κατανομή πιθανότητας ονομάζεται όποια διαφορετική συνολοσυνάρτηση που έχει και τις ιδιότητες της θετικότητας, τυποποίησης, και προσθετικότητας

■ τέλος ορισμού

Σχόλια:

▲ Ο ορισμός δεν είναι πλήρης

αφού:
- α. δεν προσδιορίζει με ακρίβεια το πεδίο ορισμού (μπορεί να μην είναι δυνατόν να είναι το 2^{Ω})
- β. η ιδιότητα γ. επεκτείνεται κ΄ "σε κατάλληλα άπειρο" πλήθος από προσθέτες.

Η σε βάθος ανάπτυξη των αδυναμιών απαιτεί έννοιες από την συνολοθεωρία που δεν έχουμε· θα κάνουμε κάποια περιορισμένα σχόλια αργότερα.

▲ Οι ιδιότητες α-γ είναι διαισθητικά εύλογες:

Απουσιάζοντας οι αριθμητικές λεπτομέρειες, το σύνολο των στοιχειωδών ενδεχομένων είναι «βέβαιο», η προσθετικότητα συνάδει με διαδικασίες μέτρησης.

Τέλος Σχολίων

Οι α, β, γ συνεπάγονται περαιτέρω ιδιότητες για την $\mathbb{P}$ που θα τις εξάγουμε κ' βασιζόμενοι στην προσέγγισή μας:

▲ $\boxed{\text{Ιδιότητες της } \mathbb{P}}$

(*1) $\Omega = \Omega \cup \emptyset$ και $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$

Επομένως $\underset{\beta}{1} = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega \cup \emptyset) \underset{\gamma}{=} \mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}(\emptyset)$ β, 1

$\underset{\beta}{\Rightarrow} 1 = 1 + \mathbb{P}(\emptyset) \Leftrightarrow \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$

υπάρχουν τουλάχιστον δύο ακόμη τρόποι για να το εξάγουμε ✓

Σχόλιο:

Στο κενό αποδίδεται μηδενική πιθανότητα από κάθε κατανομή πιθανότητας - καθολική ιδιότητα → Αν είχαμε επιτρέψει το $\Omega=\emptyset$ θα καταλήγαμε σε αντίφαση! $\mathbb{P}(\emptyset)=0$, $=1$

$(*_2)$ Αν $A, B \in 2^{\Omega}$, $A=(A\cap B)\cup(A\cap B')$ Π_2

κ' $(A\cap B)\cap(A\cap B')=\emptyset$

$\Rightarrow = (A\cap B)\cup(A-B)$

Επομένως $\forall A,B\in 2^{\Omega}$,

$(*)$ $$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}((A\cap B)\cup(A\cap B'))\overset{\sigma}{=}$$

$$=\mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(A\cap B')$$ (μετρησιμότητα) Measurability

$(*_2')$ αφού $A\cap B'=A-B$ (θυμηθείτε την Π_2) η

$(*)$ γράφεται ισοδύναμα $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(A-B)$

Σχόλιο:

Η μετρησιμότητα μας λέει ότι κ' οι κατανομές πιθανότητας είναι επί της ουσίας διαδικασίες μέτρησης!

$*_3$. Αν $B \subseteq A$ τότε $A \cap B = B$ (Θυμηθείτε την προεργασία)

Επομένως από την μετρησιμότητα

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\underbrace{B}_{A\cap B}) + \underbrace{\mathbb{P}(A \cap B')}_{\geq 0}$$

$B \subset A$ ανν γνήσιο υποσύνολο
$B \subseteq A$ κ' υπάρχουν στοιχεία του A που δεν βρίσκονται στο B

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) - \underbrace{\mathbb{P}(A \cap B')}_{\geq 0 \ (\alpha)}$$ Οπότε

δείξαμε ότι

$$B \subseteq A \Rightarrow \mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A) \quad \text{(μονοτονία)}$$

Άρα οι κατανομές πιθανότητας είναι μονότονες συνολοσυναρτήσεις [Προσοχή δεν είναι αναγκαστικά γνησίως μονότονες: Είναι δυνατόν να υπάρχουν $\mathbb{P}, A, B$ ώστε* $A \subset B$ αλλά $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$]

Θα το έχουμε υπόψη στα παραδείγματα που θα δούμε

Πόρισμα → $\forall A \in 2^{\Omega}$, $\phi \subseteq A \subseteq \Omega \overset{\text{μον}}{\Longrightarrow} \underbrace{\mathbb{P}(\phi)}_{=0} \leq \mathbb{P}(A) \leq \underbrace{\mathbb{P}(\Omega)}_{=1} \Rightarrow$

$$\boxed{\forall A \in 2^{\Omega}, \quad 0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1}$$ → οι ειμόνες της $\mathbb{P}$ βρίσκονται στο $[0,1]$

Επιλέγουμε ως A το Ω

$*4.$ $\forall B \in 2^{\Omega}$ έχουμε ότι $\Omega = \underbrace{(\Omega \cap B)}_{=B} \cup \underbrace{(\Omega \cap B')}_{=B'}$ Π_2

κ' $(\Omega \cap B) \cap (\Omega \cap B') = \emptyset$

Αλλά επίσης $\Omega \cap B = B$ $(B \subseteq \Omega)$

κ' $\Omega \cap B' := B'$

Επομένως $1 \overset{(\beta)}{=} \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}((\Omega \cap B) \cup (\Omega \cap B'))$

$\overset{(\gamma)}{=} \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(B')$

Επομένως $\boxed{\mathbb{P}(B') = 1 - \mathbb{P}(B) \quad \forall B \in 2^{\Omega}}$

Σχόλιο:

- Το παραπάνω ευνοήτως ονομάζεται ιδιότητα της συμπληρωματικής πιθανότητας σημαντικό όσο στον σχηματισμό της έχει η ιδιότητα της τυποποίησης.

Παρατηρούμε ότι:

Από την $*_4$ θα προέκυπτε άμεσα κ' η $*_1$ θέτοντας $A = \emptyset$.

$*_5$ Από την $*_2'$ έχουμε ότι $\forall A,B \in 2^{\Omega}$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A\cap B) + \mathbb{P}(A-B)$$

Αν $B \subseteq A$ τότε $A\cap B = B$ οπότε το παραπάνω γίνεται:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A-B) \Leftrightarrow$$
$$\mathbb{P}(A-B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$$

Οπότε δείξαμε ότι: Αν $B \subseteq A$ τότε

$$\mathbb{P}(A-B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$$

Σχόλιο: — Η ιδιότητα της προσθετικότητας μας δίνει ικανές συνθήκες όπου η $\mathbb{P}$ μετατρέπει την συνολοθεωρητική ένωση σε πραγματική πρόσθεση. Αντίστοιχα η $*_5$ μας δίνει ικανές συνθήκες όπου η $\mathbb{P}$ μετατρέπει την συνολοθεωρητική διαφορά σε πραγματική αφαίρεση.

[Ικανές αλλά όχι αναγκαίες!]

$*_6$ Έστω και πάλι $A, B \in 2^{\Omega}$. Αυτά δεν είναι αναγκαστικά ξένα μεταξύ τους. Τι σχέση θα έχει η $\mathbb{P}(A\cup B)$ με το άθροισμα $\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$;

↳ γενικά κ' όχι μόνο στην περίπτωση που $A\cap B=\emptyset$

Γνωρίζουμε ότι $A \subseteq A\cup B \Rightarrow \mathbb{P}((A\cup B)-A) \overset{*_5}{=} \mathbb{P}(A\cup B)-\mathbb{P}(A)$ (1)

Επίσης $(A\cup B)-A = B-(A\cap B)$

Τα στοιχεία της ένωσης που δεν βρίσκονται στο A

Τα στοιχεία του B που δεν βρίσκονται στο A

Επομένως $\mathbb{P}((A\cup B)-A) = \mathbb{P}(B-(A\cap B))$ (2)

Αλλά $A\cap B \subseteq B \overset{*_5}{\Rightarrow} \mathbb{P}(B-(A\cap B)) = \mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$ (3)

Επομένως (1), (2), (3) $\Rightarrow \mathbb{P}(A\cup B)-\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)} \quad \text{I}$$

Τέλος Διάλεξης 5

Όταν $A\cap B=\emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(\emptyset)=0$

Διάλεξη 6

Αλλά εξαιτίας της θετικότητας (b) $\mathbb{P}(A\cap B) \geq 0 \iff$

$$-\mathbb{P}(A\cap B) \leq 0 \implies \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B) \leq \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B) \quad (\mathrm{II})$$

Άρα από τις (I), (II):

$$\boxed{\mathbb{P}(A\cup B) \leq \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)} \quad (\mathrm{III})$$

Άρα δείξαμε ότι: $\forall A,B \in 2^{\Omega}$

— $\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$

► Η έκφραση μας υποδεικνύει ότι συνοψίζουμε από τις διαδικασίες μέτρησης: το άθροισμα του "μεγέθους" του A κι αυτού του B θα περιλαμβάνει κι το μέγεθος της τομής τους. Επομένως το τελευταίο θα πρέπει να αφαιρεθεί για να βρεθεί το "μέγεθος της ένωσης.

Διάλεξη 6

▸ Όταν $A\cap B=\emptyset \overset{\times_1}{\Rightarrow} \mathbb{P}(A\cap B)=0$ οπότε η (Ι) μας δίνει την ιδιότητα της προσθετικότητας

[Προσοχή: Είναι δυνατόν $A\cap B\neq\emptyset$ αλλά $\mathbb{P}(A\cap B)=0$ – δείτε παράδειγμα – κ' τότε ισχύει ότι $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$]

– $\mathbb{P}(A\cup B)\leq \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B) \quad \forall A,B\in 2^{\Omega}$

που ονομάζεται ιδιότητα της υποπροσθετικότητας της $\mathbb{P}$ (sub-additivity) (Άρα οι κατανομές πιθανότητας είναι υποπροσθετικές)

Άσκηση: Αν $A,B,\Gamma\in 2^{\Omega}$ να βρεθεί η

$$\mathbb{P}(A\cup B\cup \Gamma)-\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(\Gamma)$$

Περαιτέρω σχόλια επί του ορισμού:

- Όπως αναφέρθηκε αρχικά ο ορισμός της IP δεν είναι απολύτως μαθηματικά ακριβής. Η διατύπωση και κατανόηση του ακριβούς ορισμού ξεφεύγει του εύρους του μαθήματος επειδή αφορά σε έννοιες από κλάδους των μαθηματικών (Συνολοθεωρία, Θεωρία μέτρου) που δεν μας είναι διαθέσιμες. Οι ανακρίβειες αφορούν τα παρακάτω αλληλοσχετιζόμενα ζητήματα:

1. Ως πεδίο ορισμού της IP υιοθετήθηκε το 2^Ω. Αυτό δεν είναι προβληματικό όταν π.χ. το Ω είναι πεπερασμένο (ή ακόμη κ' ένα σύνολο όπως τα $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$). Όταν

Συμπληρωματική Διάλεξη

Το Ω είναι περαιτέρω περίπλοκο (όπως π.χ. τα $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ...) τότε αποδεικνύεται ότι: αν θέλουμε η $\mathbb{P}$ να έχει μια επέκταση της ιδιότητας της προσθετικότητας σε άπειρο πλήθος γεγονότων (δείτε την επόμενη παρατήρηση) (η οποία με την σειρά της συνεπάγεται μια χρήσιμη ιδιότητα συνέχειας για την $\mathbb{P}$), θα υπάρχουν υποσύνολα του Ω στα οποία δεν θα μπορούμε να αποδώσουμε πιθανότητες με συνεπή τρόπο (σε αυτά η $\mathbb{P}$ δεν θα έχει την ιδιότητα της απώλεια μετρησιμότητας). Αυτά αναφέρονται (όταν υπάρχουν) ως μη μετρήσιμα υποσύνολα του Ω. Όταν $\Omega = \mathbb{R}$ τέτοια υποσύνολα του $\mathbb{R}$ υπάρχουν αλλά η περιγραφή τους είναι περίπλοκη (εκτός του σκοπού

Συμπληρωματική Διάλεξη

του μαθήματος). Μια λύση σε αυτό το πρόβλημα είναι να θεωρούμε ότι η P ορίζεται μόνο στην συλλογή των μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ (στις σημειώσεις του μαθήματος αυτή συμβολίζεται με Σ_Ω). Αυτή σίγουρα θα περιλαμβάνει το Ω κι το $\emptyset$, όταν το Ω είναι πεπερασμένο μπορούμε να έχουμε ότι $\Sigma_\Omega = 2^\Omega$, ενώ όταν $\Omega = \mathbb{R}$ η Σ_Ω μπορεί να επιλεγεί ώστε να περιέχει τα "οικεία" σε εμάς υποσύνολα του $\mathbb{R}$ (π.χ. απομονωμένους αριθμούς, διαστήματα, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, κ.ο.κ.)

2. Όταν το πεδίο ορισμού της P είναι το Σ_Ω αποδεικνύεται ότι η ιδιότητα 3 (προσθετικότητα) επεκτείνεται και σε άπειρο πλήθος παρα-

↳ μπορούμε να επιλέξουμε να ισχύει

Συμπληρωματική Αξίωση

φόντων (αρκεί το πλήθος να μην υπερβαίνει το πλήθος των φυσικών). Δηλ. αν

$A_0, A_1, \dots, A_n, \dots \in \Sigma_\Omega$ (δηλ. μετρήσιμα κ' μπορώ να τους αποδώσω πιθανότητα)

επισημαίνονται από το $\mathbb{N}$

Τότε $A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_n \cup \dots \in \Sigma_\Omega$

απαριθμήσιμη ένωση

μετρήσιμη, οπότε μπορώ να της αποδώσω πιθανότητα

κ' αν $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$

↳ ανά δύο ξένα μεταξύ τους

Τότε

$$\mathbb{P}(A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_n \cup \dots) = \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_n) + \dots$$ ✓

Δεν αναφέραμε τι ακριβώς είναι ← Απαριθμήσιμα αθροίσματα

↳ πραγματική σειρά → Μαθ. ΙΙ

Συμπληρωματική Διάλεξη

Η επέκταση αυτή ονομάζεται **αριθμήσιμη προσθετικότητα** (countable additivity) κ' συνεπάγεται για χρήσιμη ιδιότητα συνέχειας της $\mathbb{P}$ (που δεν χρειαζόμαστε αλλά θα την δούμε αργότερα "συμπληρωματική").

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)$$

δεν ξέρουμε τι σημαίνει το όριο

Διάλεξη 6

Σύνολα Αμελητέα κ' Πλήρους Πιθανότητας

Ορισμός. Αν $A \subseteq \Omega$ και $\mathbb{P}(A)=0$ τότε το A ονομάζεται **αμελητέο ως προς την $\mathbb{P}$** ($\mathbb{P}$-negligible). Ανάλογα αν $\mathbb{P}(A)=1$ τότε το A ονομάζεται **σύνολο πλήρους πιθανότητας ως προς την $\mathbb{P}$**.

Οι έννοιες εξαρτώνται από την δεδομένη $\mathbb{P}$

Διάλεξη 6

Σχόλιο: το $\emptyset$ είναι αμελητέο $\forall \mathbb{P}$ (καθολικά αμελητέο). Το Ω είναι πλήρους πιθανότητας $\forall \mathbb{P}$ (καθολικά πλήρους πιθανότητας). Προσοχή αν το $A \neq \emptyset, \Omega$ τότε το αν είναι αμελητέο ή όχι, ή πλήρους πιθανότητας ή όχι εξαρτάται από την $\mathbb{P}$.

δηλ. α. η ιδιότητα του αμελητέου ως προς την $\mathbb{P}$ κληρονομείται από τα υποσύνολα
β. η ιδιότητα του πλήρους πιθανότητας ως προς την $\mathbb{P}$ κληρονομείται από τα υπερσύνολα.

Λήμμα. α. Αν το A $\mathbb{P}$ αμελητέο κ' $B \subseteq A$ τότε κ' το B $\mathbb{P}$ αμελητέο.

β. Αν το A πλήρους πιθανότητας ($\mathbb{P}$) κ' $B \supseteq A$ τότε κ' το B πλήρους πιθανότητας ($\mathbb{P}$).

παίζει ρόλο η μονοτονία της $\mathbb{P}$

Απόδειξη. α. $B \subseteq A \overset{\text{μον.}}{\Longrightarrow} \mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A) = 0$

Αλλά $\mathbb{P}(B) \geq 0 \Rightarrow \mathbb{P}(B) = 0$.

β. $A \subseteq B \overset{\text{μον}}{\Longrightarrow} 1 = \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

Αλλά $\mathbb{P}(B) \leq 1 \Rightarrow \mathbb{P}(B) = 1$. ∎

Διάλεξη 6

Λήμμα. Το A $\mathbb{P}$ αμελητέο $\iff$ A' πλήρους πιθανότητας ($\mathbb{P}$)

δηλ. είναι αμελητέο ως προς την $\mathbb{P}$.

Απόδειξη. A $\mathbb{P}$-αμελητέο $\iff \mathbb{P}(A)=0 \iff$

$$1-\mathbb{P}(A)=1 \iff \mathbb{P}(A')=1. \blacksquare$$

Άρα τα αμελητέα είναι δυικά ως προς τα πλήρους πιθανότητας. [δηλ. αντιστοιχούν ανά ζεύγη]

Παραδείγματα Κατανομών Πιθανότητας:

- (αντι-παράδειγμα) Στο παράδειγμα 1 η σ δεν είναι κατανομή πιθανότητας αφού π.χ. $\sigma(\emptyset)=1$ [αποτυγχάνει στην προσθετικότητα (δείτε την διάλεξη 4) κ' στην τυποποίηση – $\sigma(\Omega)=0$]
- Στο παράδειγμα 2 η Q είναι ① θετικότητα εμφανώς, ② τυποποίηση εμφανώς, ③ προσθετικότητα $1=Q(\Omega)=Q(\{\alpha,\beta\})$ $=1/3+2/3=Q(\{\alpha\})+Q(\{\beta\})$, κ.λ.π.
- Άσκηση: Στο παράδειγμα 3 η λ είναι κατανομή πιθανότητας;

$\lambda([0,2])=2-0=2>1$ οπότε η λ δεν είναι κατ.

[redacted] Τα προηγούμενα (παρ. 2) μας είπαν ότι υπάρχουν κατανομές πιθανότητας. Ας δούμε κάποια πιο ουσιαστικά παραδείγματα για διάφορες επιλογές του Ω:

1. $\Omega = \{\alpha, \beta\}$, $\Sigma_\Omega = \{\emptyset, \Omega, \{\alpha\}, \{\beta\}\} = 2^\Omega$

Παράμετρος $q \in [0,1]$, $\mathbb{P}_q(\emptyset) = 0$, $\mathbb{P}_q(\{\alpha\}) = q$

$\mathbb{P}_q(\Omega) = 1$, $\mathbb{P}_q(\{\beta\}) = 1-q$

[redacted] ✓

Έχουμε με το παραπάνω περιγράψει όλες τις κατανομές που μπορούν να περιγραφούν εδώ;

Παρατηρήσεις: Συμπληρωματική Διάλεξη

α. Έστω $q, q^* \in [0,1]$ με $q \neq q^*$. Ισχύει ισότητα μεταξύ των $\mathbb{P}_q, \mathbb{P}_{q^*}$; Θα είναι διαφορετικές (μη ίσες) αφού $\mathbb{P}_q(\{\alpha\}) = q \neq q^* = \mathbb{P}_{q^*}(\{\alpha\})$

Επομένως $\mathbb{P}_q \neq \mathbb{P}_{q^*}$. Δηλαδή σε κάθε τιμή του q αντιστοιχεί μοναδική $\mathbb{P}_q$.

β. Είναι δυνατόν σε αυτό το Ω να υπάρχουν κατανομές πιθανότητας που δεν μπορούν να περιγραφούν όπως παραπάνω; Όχι. Έστω ότι η $\mathbb{Q}$ είναι μια κατανομή πιθανότητας στο $\Omega = \{\alpha, \beta\}$. Αναγκαστικά αυτή θα αποδίδει κάποια πιθανότητα $\mathbb{Q}(\{\alpha\})$ όταν υπολογίζει στο $\{\alpha\}$. $\mathbb{Q}(\{\alpha\}) \in [0,1]$ επομένως μπορούμε να τον ορίσουμε να είναι το αντίστοιχο q. Επομένως και αυτή η κατανομή θα είναι μια από τις παραπάνω για κάποια τιμή του q.

2. Ισότητα κατανομών πιθανότητας

Συμπληρωματική Διάλεξη

Έστω ότι οι $\mathbb{P}, \mathbb{Q} : \Sigma_\Omega \to \mathbb{R}$ κατανομές πιθανότητας επί γενικού συνόλου αναφοράς Ω. Θα έχουμε ότι

$\mathbb{P} = \mathbb{Q}$ ανν $\forall A \in \Sigma_\Omega$ ισχύει $\mathbb{P}(A) = \mathbb{Q}(A)$. Ανάθετα θα έχουμε

$\mathbb{P} \neq \mathbb{Q}$ ανν $\exists A \in \Sigma_\Omega$ ισχύει $\mathbb{P}(A) \neq \mathbb{Q}(A)$.

Συμπληρωματική Διάλεξη

3. Παρατηρήσεις σε αυτό το παράδειγμα:

1. Σε αυτό το παράδειγμα έχουμε τόσες κατανομές όσες και τα στοιχεία του $[0,1]$ (Συγκρίνετέ το αυτό με το τι συνέβαινε στο προηγούμενο παράδειγμα όπου $\Omega = \{\alpha\}$)

2. Σε αυτό το παράδειγμα έχουμε περιγράψει οικογένεια κατανομών (για την ακρίβεια όλες τις κατανομές που θα μπορούσαν να οριστούν εδώ). Το σημαντικό εδώ είναι ότι η οικογένεια αυτή περιγράφεται μονοσήμαντα από την παράμετρο q (που είναι συνηθισμένο). Συνεπώς είναι δυνατόν να υπάρχουν οικογένειες από κατανομές που περιγράφονται μονοσήμαντα από τέτοιου είδους παραμέτρους. (μονοσήμαντα: το να γνωρίζουμε την τιμή της παραμέτρου στην εκάστοτε περίπτωση ισοδυναμεί με το να γνωρίζουμε με ακρίβεια την κατανομή) Αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία σε ζητήματα στατιστικής επαγωγής.

3. Ως προς τα αμελητέα και τα σύνολα πλήρους πιθανότητας στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε τα εξής:

- $\mathbb{P}_q(\emptyset) = 0$, $\forall q \in [0,1]$ άρα το $\emptyset$ είναι "καθολικά αμελητέο"
- $\mathbb{P}_q(\Omega) = 1$, $\forall q \in [0,1]$ άρα το Ω " " πλήρους πιθανότητας.
- $\mathbb{P}_q(\{\alpha\}) = \begin{cases} 0 & \text{αν } q=0 \\ 1 & \text{αν } q=1 \end{cases}$ δηλ. το $\{\alpha\}$ είναι αμελητέο ως προς την $\mathbb{P}_0$ κ' πλήρους πιθανότητας ως προς την $\mathbb{P}_1$
- $\mathbb{P}_q(\{\beta\}) = \begin{cases} 1 & \text{αν } q=0 \\ 0 & \text{αν } q=1 \end{cases}$ δηλ. $\{\beta\}$ είναι αμελητέο ως προς την $\mathbb{P}_1$ και πλήρους πιθανότητας ως προς την $\mathbb{P}_0$.

Συνεπώς το αν το $A \in \Sigma_\Omega$ είναι αμελητέο ή πλήρους πιθανότητας ή τίποτα από τα δύο εξαρτάται γενικά από την εκάστοτε $\mathbb{P}$.

Συνεπώς η παραπάνω περιγραφή εξαντλεί όλες τις κατανομές που μπορούν να οριστούν σε αυτό το παράδειγμα, στο οποίο τελικά έχουμε τόσες κατανομές όσες και οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει το q.

0. $\Omega = \{\alpha\}$, $2^\Omega = \{\emptyset, \Omega\} = \Sigma_\Omega$

Η μοναδική $\mathbb{P}$ που μπορούμε να ορίσουμε εδώ είναι η $\mathbb{P} : \Sigma_\Omega \to \mathbb{R}$ με

$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

$\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Διάλεξη 6

4. Είναι εφικτό χρησιμοποιώντας όσα είδαμε μέχρι τώρα να περιγράψουμε παράδειγμα $\mathbb{P}$ όταν $\Omega = \mathbb{R}$;

Συμπληρωματική Διάλεξη

Στα παραδείγματα υπενθυμίζουμε όλη τη διαθέσιμη δομή:

Επιλογή Ω (i)

↓

Προσδιορισμός του 2^Ω (Σ_Ω) (ii)

↓

Περιγραφή παραδείγματος $\mathbb{P}$ στην παραπάνω δομή (iii)

Διάλεξη 6

Παράδειγμα 0.

Ικανοποιεί η $\mathbb{P}$ που περιγράψαμε τον ορισμό;

* Είναι προφανές ότι είναι πραγματική συνολοσυνάρτηση (ορίζεται στο $2^{\Omega} = \{\emptyset, \Omega\}$ κ' αποδίδει πραγματικούς αριθμούς)

* Έχουμε ότι $\mathbb{P}(\emptyset) = 0 \geq 0$, $\mathbb{P}(\Omega) = 1 > 0 \Rightarrow$ ισχύει η θετικότητα

* Έχουμε ότι $\mathbb{P}(\Omega) = 1 \Rightarrow$ ισχύει η ιδιότητα της κανονικοποίησης

* Δυνατές ενώσεις δύο ξένων μεταξύ τους υποσυνόλων του Ω:

i. $\Omega \cup \emptyset = \Omega$

$\Omega \cap \emptyset = \emptyset$

$$\underline{1} = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega \cup \emptyset)$$
$$1 = 1 + 0 = \mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}(\emptyset)$$

ii. $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$

$\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$

$$0 = \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset \cup \emptyset)$$
$$0 = 0 + 0 = \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset)$$

$\Rightarrow$ ισχύει η προσθετικότητα

$\Downarrow$

Άρα η $\mathbb{P}$ είναι καλώς ορισμένη κατανομή πιθανότητας

Συμπληρωματική Διάλεξη

* Από την έννοια της ισότητας μεταξύ κατανομών πιθανότητας προκύπτουν τα εξής: αν η Q επίσης κατανομή πιθανότητας επί του Ω τότε αναγκαστικά $Q(\emptyset)=0$ κ' $Q(\Omega)=1$ $\Rightarrow \mathbb{P}=Q \Rightarrow$ η $\mathbb{P}$ είναι η μοναδική κατανομή που μπορεί να οριστεί επί του $\Omega=\{\alpha\}$.

Παράδειγμα 1

$q\in[0,1]$. Ικανοποιεί η $\mathbb{P}_q$ τον ορισμό;

* Πρόκειται για πραγματική συνολοσυνάρτηση

(ορίζεται σε κάθε στοιχείο του 2^{Ω} κ' αποδίδει πραγματικούς αριθμούς)

* Έχουμε ότι $\mathbb{P}_q(\emptyset)=0\geq 0$, $\mathbb{P}_q(\{\alpha\})=q\geq 0$, $\mathbb{P}_q(\{\beta\})=1-q\geq 0$

$[0,1]$

$\mathbb{P}_q(\Omega)=1>0$ ↳ ισχύει η θετικότητα

* $\mathbb{P}_q(\Omega)=1 \Rightarrow$ ισχύει η τυποποίηση

* i. $\Omega\cup\emptyset=\Omega$, $\Omega\cap\emptyset=\emptyset$

$$1=\mathbb{P}_q(\Omega)=\mathbb{P}_q(\Omega\cup\emptyset)$$
$$1=1+0=\mathbb{P}_q(\Omega)+\mathbb{P}_q(\emptyset)$$

ii. $\emptyset\cup\emptyset=\emptyset$, $\emptyset\cap\emptyset=\emptyset$

$$0=\mathbb{P}_q(\emptyset)=\mathbb{P}_q(\emptyset\cup\emptyset)$$
$$0=0+0=\mathbb{P}_q(\emptyset)+\mathbb{P}_q(\emptyset)$$

Συμπληρωματική Διάλεξη

iii. $\Omega = \{\alpha\} \cup \{\beta\} = \{\alpha, \beta\}$ $\qquad$ $1 = \mathbb{P}_q(\Omega) = \mathbb{P}_q(\{\alpha\} \cup \{\beta\})$

$\{\alpha\} \cap \{\beta\} = \emptyset$ $\qquad$ $1 = q + 1 - q = \mathbb{P}_q(\{\alpha\}) + \mathbb{P}_q(\{\beta\})$

Εξαντλήσαμε όλες τις περιπτώσεις

Επομένως η προσθετικότητα ικανοποιείται από την $\mathbb{P}_q$.

$\Rightarrow$ Οπότε η $\mathbb{P}_q$ είναι καλώς ορισμένη κατανομή πιθανότητας $\forall q \in [0,1]$.

* Θυμάσαστε την $Q : 2^{\Omega} \to \mathbb{R}$ που είχα ορίσει ως εξής: $Q(\emptyset) = 0$, $Q(\{\alpha\}) = 1/3$, $Q(\{\beta\}) = 2/3$, $Q(\Omega) = 1$ που είχαμε δείξει ότι είναι μια καλώς ορισμένη κατανομή πιθανότητας. Προφανώς $Q = \mathbb{P}_{1/3}$.