Διαλέξεις 3-4

- Συνέχεια της συνολοθεωρητικής προεργασίας
  - περαιτέρω πράξεις
  - συνολοσυναρτήσεις
- Ορισμός κατανομής πιθανότητας επί του Ω
- Ιδιότητες

Υπενθύμιση:

* Μας ενδιαφέρει να ορίσουμε κ' να κατανοήσουμε την έννοια της κατανομής πιθανότητας επί συνόλου αναφοράς $\Omega \neq \emptyset$ (προκειμένου να το εξειδικεύσουμε μετά στην περίπτωση $\Omega = \mathbb{R}$)

* Αναφέρουμε ότι είναι συνάρτηση που ορίζεται στην συλλογή όλων υποσυνόλων του Ω (ή σε κατάλληλη υποσυλλογή) που θα "σέβεται" με τις συνολοθεωρητικές σχέσεις κ' πράξεις στην συλλογή.

Επομένως:

→ Θυμηθήκαμε την έννοια του δυναμοσυνόλου:

"ποσοτικότητα" που αυξάνεται "εκθετικά" με το πλήθος στοιχείων του Ω

όταν Ω απειροσύνολο γίνεται "δύσκολη" η εξαντλητική περιγραφή του

Υπάρχουν σχέσεις κ' πράξεις σε αυτό.

– Σχέσεις εγκλεισμού $\subseteq$ (inclusion), Πράξεις: Ένωση $\cup$ (union) κ' Τομή $\cap$ (intersection)

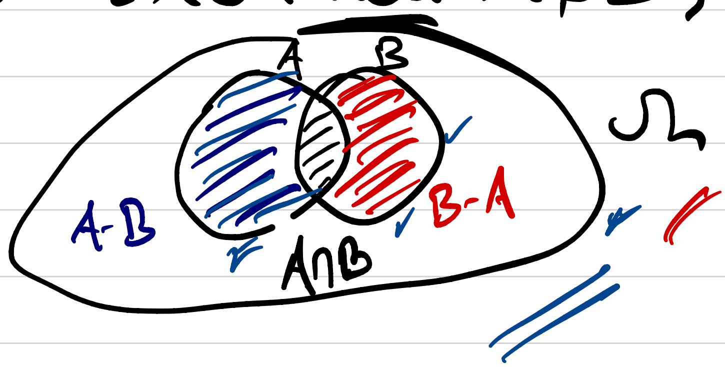
[Παρατηρήσαμε ότι αλληλεπιδρούν κ' μπορεί να έχουν αλγεβρικές ιδιότητες]

Συνεχίζουμε:

$A, B \subseteq \Omega$

▸ Πράξη της συνολοθεωρητικής διαφοράς (set-difference)

$$A-B=\{x\in A \text{ και } x\notin B\}$$



A-B αποτελείται από τα στοιχεία του A που δεν βρίσκονται στο B.

B-A αποτελείται από τα στοιχεία του B που δεν βρίσκονται στο A.

Κάποιες απλές ιδιότητες που είναι εύκολο να επιβεβαιωθούν:

- $A-B \in 2^{\Omega}$ $(\Leftrightarrow A-B \subseteq \Omega)$
  (δηλ. όποτε σχηματίζουμε διαφορές αποκτούμε υποσ. του Ω)
- Η πράξη δεν είναι μεταθετική
- $A \subseteq B \overset{\text{ισοδυναμία}}{\Leftrightarrow} A-B=\emptyset$
  (ένας ακόμη χαρακτηρισμός της σχέσης εγκλεισμού μέσω πράξης) → κλασικό διάζευγμα

π.χ. Έστω $\Omega=\mathbb{R}$, $A=[0,1]$, $B=\{0,1\}$

$$\underset{[0,1]-\{0,1\}}{A-B=(0,1)}, \quad B-A=\emptyset \quad (B\subseteq A)$$

Μέσω της συνολοθεωρητικής διαφοράς μπορούμε να ορίσουμε την πράξη του συμπληρώματος (complement) μέσα στο Ω: [Είναι δυνατόν το συμπλήρωμα A^c]

$A\subseteq\Omega$, $\quad A' = \Omega - A = \{x\in\Omega \text{ και } x\notin A\}$

οπότε $A-B = \{x\in A \text{ και } x\notin B\} = \{x\in A \text{ και } x\in\Omega \text{ και } x\notin B\} = \{x\in A \text{ και } \underbrace{(x\in\Omega \text{ και } x\notin B)}_{B'}\} =$

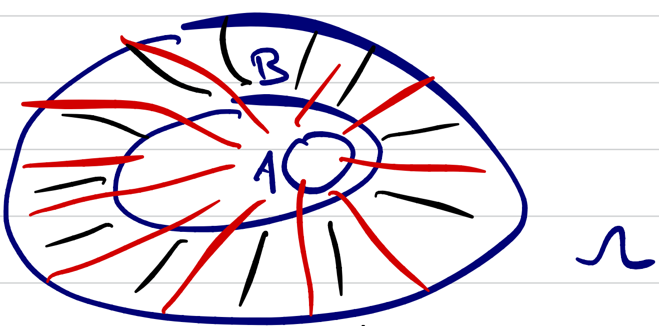
$= A\cap B' \quad (*)$

[Το (*) μας λέει ότι θα μπορούσαμε να ξεκινήσουμε από την πλευρά του συμπληρώματος κ' μέσω αυτής κ' της τομής να ορίσουμε την διαφορά]

Κάποιες απλές ιδιότητες:

* (Αλληλεπίδραση με την σχέση του εγκλεισμού)

$$A\subseteq B \iff B'\subseteq A' \quad (\text{αντιμονοτονία})$$



$A'\supseteq B'$

Παρ. $\Omega=\mathbb{R}$, $A=\{0,1\}\subseteq B=[0,1]$

$$B'=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)\subseteq(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)=A'$$

$B' = \mathbb{R}-B=\{x\in\mathbb{R},\ x\notin[0,1]\}$

$A' = \mathbb{R}-A=\{x\in\mathbb{R},\ x\neq 0, x\neq 1\}$

* Συμπληρώματα των ακραίων περιπτώσεων

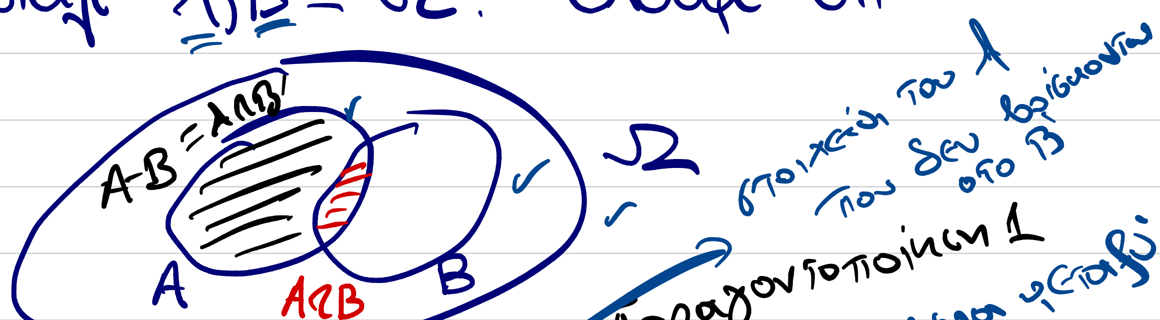
$$\Omega'=\Omega-\Omega=\emptyset,\quad \emptyset'=\Omega-\emptyset=\Omega$$

* Επαναληπτική εφαρμογή: $(A')' = \Omega - A' =$

$= \Omega - (\Omega - A) = A$ ∎

▸ **Παραγοντοποίηση υποσυνόλου του Ω ως ένωση ξένων μεταξύ τους παραγόντων χρησιμοποιώντας βοηθητικό υποσύνολο του A.**

Έστω και πάλι $A, B \subseteq \Omega$. Έχουμε ότι



κοινά στοιχεία

Παραγοντοποίηση 1

ξένα μεταξύ τους

$$A = (A\cap B) \cup (A-B) \quad (\Pi_1) \quad \left[(A\cap B)\cap(A-B) = \emptyset\right]$$

$$\overset{(*)}{=} (A\cap B) \cup (A\cap B') \quad (\Pi_2) \Rightarrow \text{Παραγοντοποίηση 2}$$

* Οι Π_1 κ Π_2 προσφέρουν έκφραση του A ως "ξένη ένωση" παραγόντων που σχετίζονται με το βοηθητικό υποσύνολο B. Σημαντικό σε

Διαδικασίες μέτρησης και απόδοσης "μεγέθους":

Αν θέλουμε να αποδώσουμε μέγεθος στο A κ' υπάρχει B τέτοιο ώστε να είναι εύκολο να γνωρίζουμε το μέγεθος του $A \cap B$ κ' του $A \cap B'$ τότε μπορούμε να χρησιμοποιούμε τα πιθανοτικά κ' το Π_2 για να "βρούμε το μέγεθος του A".

Τα πιθανοτικά μας είναι εργαλείο για τις σχέσεις κ' πράξεις που μας ενδιαφέρουν μεταξύ των υποσυνόλων του Ω.

Το επόμενο βήμα θα είναι να ορίσουμε κ' να δούμε ιδιότητες κ' παραδείγματα από πραγματικές συναρτήσεις που ορίζονται στο δειγματοχώρο (όποια συνάρτηση ονομάζεται πραγματική εφόσον το πεδίο τιμών της μπορεί να επιλεγεί να είναι το $\mathbb{R}$)

▶ Πραγματικές συνολοσυναρτήσεις

Δεδομένου του συνόλου αναφοράς αναμένουμε ότι όποια κατανομή πιθανότητας (επί του Ω) θα είναι συνάρτηση που ορίζεται στο 2^Ω (ή σε υποσυλλογή του), θα αποδίδει πραγματικούς αριθμούς κ' θα ικανοποιεί κάποιες ιδιότητες. Αξίζει να έχουμε υπόψη την έννοια της πραγματικής συνολοσυνάρτησης (real set function):

<u>Ορισμός</u>. Έστω Ω $(\neq \emptyset)$ σύνολο αναφοράς. <u>Πραγματική</u> συνολοσυνάρτηση επί του Ω καλείται όποια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το 2^Ω (ή <u>κάποια κατάλληλη υποσυλλογή του</u>) κ' πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 1. $\Omega = \{\alpha\}$, $2^{\Omega} = \{\emptyset, \Omega\}$

$G: 2^{\Omega} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής:

$$G(\emptyset) = 1, \quad G(\Omega) = 0$$

συνολοσυνάρτηση του Ω

Παράδειγμα 2. $\Omega = \{\alpha, \beta\}$, $2^{\Omega} = \{\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \Omega\}$

$Q: 2^{\Omega} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως

$$Q(\emptyset) = 0, \quad Q(\{\alpha\}) = 1/3, \quad Q(\{\beta\}) = 2/3, \quad Q(\Omega) = 1$$

Προσπαθήστε να κατασκευάσετε δικά σας παραδείγματα στα 1-2.

Προσοχή:

"Μια τέτοια συνάρτηση υπολογίζεται σε υποσύνολα του Ω, όχι σε στοιχεία του, και αποδίδει πραγματικούς αριθμούς."

Για να το δούμε καλύτερα σκεφτόμαστε π.χ. το παράδειγμα 2. Για $\Omega = \{\alpha, \beta\}$ μια συνάρτηση που υπολογίζεται στα στοιχεία του Ω θα ήταν απλώς μια συνάρτηση $f: \Omega \to \mathbb{R}$

↳ όχι το 2^{Ω}

π.χ. η $f(\alpha)=0$, $f(b)=1$. Προφανώς η f είναι πολύ διαφορετικό αντικείμενο από την Q στο παράδειγμα 2 (διαφορετικά πεδία ορισμού).

Τέλος Διαλέξης 3. ☑

Παράδειγμα 3. Έστω ότι $\Omega=\mathbb{R}$, και ασχολούμαστε όχι με το $2^{\mathbb{R}}$ αλλά με την υποσυλλογή του $\Delta := \{ [\alpha,b],\ \alpha,b\in\mathbb{R},\ \alpha<b \}$.

$\hookrightarrow$ δηλαδή την υποσυλλογή που αποτελείται από όλα τα κλειστά διαστήματα με πεπερασμένη ακτίνα.

π.χ. τα $[-1,1]$, $[0,1]$, $[-3,-1]$ κ.ο.π.

Προσοχή διαστήματα της μορφής $(-\infty,\alpha)$ $(-\infty,\alpha]$, $[\alpha,+\infty)$, $(\alpha,+\infty)$ δεν ανήκουν σε αυτή την συλλογή.

Ορίζουμε την πραγματική συνολοσυνάρτηση:

$\lambda : \Delta \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από το

$\lambda([\alpha,b]) = b-\alpha$ (δηλ. μας αποδίδει το μήκος κάθε διαστήματος – στοιχείου της συλλογής.

* Το παράδειγμα 3 μπορεί να επεκταθεί κ' σε πιο σύνθετες υποσυλλογές από ανοιχτά του $\mathbb{R}$. (δείτε αν θέλετε την έννοια του μέτρου Lebesgue)

Οι προσθετικές συνολοσυναρτήσεις είναι δυνατόν να έχουν ιδιότητες που σχετίζονται με τις συνολοθεωρητικές έννοιες που είδαμε προηγουμένως. Δύο από αυτές, οι οποίες θα μας ενδιαφέρουν στην συνέχεια:

I. **Ορισμός** (Μονοτονία) Monotonicity

Η $G : 2^{\Omega} \to \mathbb{R}$ (ή κατάλληλη υποσυλλογή) θα ονομάζεται μονότονη ανν $A \subseteq B \Rightarrow \underbrace{G(A)}_{\in \mathbb{R}} \le \underbrace{G(B)}_{\in \mathbb{R}}$.

– Το παραπάνω είναι αντίστοιχο με την συνηθισμένη έννοια της αύξουσας συνάρτησης.

π.χ. στο παράδειγμα 1. η G δεν είναι μονότονη αφού $\emptyset \subseteq \Omega$ αλλά $1 = G(\emptyset) > 0 = G(\Omega)$

*Συνεπώς είναι δυνατόν για συνολοσυνάρτηση να μην είναι μονότονη.

Π.χ. Στο παράδειγμα 2 η Q είναι μονότονη

$$\emptyset \subseteq \{\alpha\} \subseteq \Omega,\quad \emptyset \subseteq \{\beta\} \subseteq \Omega \xrightarrow{Q} \underset{0}{\underset{\parallel}{Q(\emptyset)}} \leq Q(\{\alpha\})=1/3 \leq Q(\Omega)=1,\quad Q(\emptyset) \leq Q(\{\beta\})=2/3 \leq Q(\Omega)=1$$

Επομένως έχουμε μονοτονία.

Π.χ. Στο παράδειγμα 3 η λ είναι μονότονη

αφού αν $A, B \in \mathcal{A} \Leftrightarrow A=[\alpha,\beta],\ \alpha<\beta,\quad B=[\alpha^*,\beta^*],\ \alpha^*<\beta^*$

αν $A \subseteq B \Leftrightarrow \alpha^* \leq \alpha$ κ' $\beta \leq \beta^*$ ✓

κ' $\lambda(A) = \beta-\alpha \leq \beta^*-\alpha^* = \lambda(B)$. ■

II. Ορισμός (Προσθετικότητα) additivity

Η $\sigma: 2^{\Omega} \to \mathbb{R}$

ή κατάλληλη υποσυλλογή

Θα αναφέρεται προσθετική αν όταν $A \cap B = \emptyset$,

$\sigma(A \cup B) = \sigma(A) + \sigma(B)$.

* Μια προσθετική συνάρτηση μετατρέπει την ένωση ξένων κομματιών του Ω σε άθροισμα. ✓

π.χ. Στο παράδειγμα 1 η G δεν είναι προσθετική

αφού $\phi \cap \Omega = \phi$, $\phi \cup \Omega = \Omega$ (Θυμηθείτε την προεργασία)

$$G(\phi \cup \Omega) = G(\Omega) = 0 \quad \times$$
$$G(\phi) + G(\Omega) = 1 + 0 = 1$$

συνεπώς δεν έχουμε προσθετικότητα

* Συνεπώς υπάρχουν συναρτήσεις που δεν ικανοποιούν την ιδιότητα της προσθετικότητας.

π.χ. Στο παράδειγμα 2 η Q είναι προσθετική

μπορούμε να το δούμε εξαντλώντας τις σχετικές περιπτώσεις:

- $\Omega = \Omega \cup \phi$ $(\Omega \cap \phi = \phi)$ $1 = Q(\Omega)$, $Q(\phi) = 0$

  οπότε $Q(\Omega) + Q(\phi) = 1 + 0 = 1$

- $\Omega = \{\alpha\} \cup \{\beta\}$, $\{\alpha\} \cap \{\beta\} = \phi$, $Q(\{\alpha\} \cup \{\beta\}) = Q(\Omega) = 1$

  $Q(\{\alpha\}) = 1/3$, $Q(\{\beta\}) = 2/3$, $Q(\{\alpha\}) + Q(\{\beta\}) = 1/3 + 2/3 = 1$

- $\phi = \phi \cup \phi$, $\phi \cap \phi = \phi$ $Q(\phi) + Q(\phi) = 0 + 0 = 0$

  $Q(\phi \cup \phi) = Q(\phi) = 0$.

Τέλος Διάλεξης 11.

Μπορούμε επιτέλους να σχετίσουμε έναν (όχι απολύτως ακριβή) ορισμό της έννοιας της κατανομής πιθανότητας επί του Ω.

▶ Κατανομές (ή μέτρα) πιθανότητας επί του Ω

Ορισμός. Κατανομή (ή μέτρο πιθανότητας – probability distribution/measure) επί του Ω θα αναφέρλέγεται όποια πραγματική συνολοσυνάρτηση

$$\mathbb{P} : 2^{\Omega} \to \mathbb{R}$$

ή καλύτερα η υποσυλλογή από υποσύνολα του Ω στα οποία θέλουμε κ' μπορούμε να αποδίδουμε πιθανότητες

που ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

α. $\forall A \in 2^{\Omega}$, $\mathbb{P}(A) \geq 0$ (θετικά ορισμένη)

β. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (τυποποίηση)

γ. $\forall A, B \in 2^{\Omega}$ με $A \cap B$: $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

(προσθετικότητα)

Ο ορισμός δεν είναι πλήρης

αφού:
- α. δεν προσδιορίζεται με ακρίβεια το πεδίο ορισμού (μπορεί να μην είναι δυνατόν να είναι το 2^{Ω})
- β. η ιδιότητα γ. επεκτείνεται κ'

σε «κατάσταση άπειρο» πλήθος από παράγοντες.

Η σε βάθος ανάλυση των ασαφειών απαιτεί έννοιες από την συνολοθεωρία που δεν έχουμε· θα κάνουμε κάποια περιγραφικά σχόλια αργότερα.

Οι ιδιότητες α-γ είναι διαισθητικά εύλογες:

Αποκλείονται οι αρνητικές πιθανότητες, το σύνολο των στοιχειωδών ενδεχομένων είναι «βέβαιο», η προσθετικότητα συνάδει με διαδικασίες μέτρησης.

Οι α,β,γ συνεπάγονται περαιτέρω ιδιότητες για την Ρ που θα τις εξάγουμε & βασιζόμενοι στην προεργασία μας:

Ιδιότητες της $\mathbb{P}$

*1. $\Omega = \Omega \cup \emptyset$ και $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$

Επομένως $1 \underset{\beta}{=} \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega \cup \emptyset) \underset{\gamma}{=} \mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}(\emptyset)$

$$\underset{\beta}{\Rightarrow} 1 = 1 + \mathbb{P}(\emptyset) \iff \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

[Στο κενό αποδίδεται μηδενική πιθανότητα από κάθε κατανομή πιθανότητας - καθολική ιδιότητα]

*2 Αν $A, B \in 2^{\Omega}$, $A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$ Π_2

κ' $(A \cap B) \cap (A \cap B') = \emptyset$

Επομένως $\forall A, B \in 2^{\Omega}$,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap B')) \underset{\gamma}{=}$$

$$= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B')$$ (μετρησιμότητα)

[Η μετρησιμότητα μας λέει ότι κι οι δεσμευμένες πιθανότητες είναι επί της ουσίας διαδικασίες μέτρησης]

$*_3$. Αν $B \subseteq A$ τότε $A \cap B = B$ (θυμηθείτε την προεργασία)

Επομένως από την μετρησιμότητα

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\underbrace{B}_{=A \cap B}) + \mathbb{P}(A \cap B')$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) - \underbrace{\mathbb{P}(A \cap B')}_{\geq 0 \ (\alpha)}$$ Οπότε

δείξαμε ότι αν

$$B \subseteq A \Rightarrow \mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A) \quad \text{(μονοτονία)}$$

Άρα οι δεσμευμένες πιθανότητες είναι μονότονες συνολοσυναρτήσεις [Προσοχή δεν είναι αναγκαστικά γνησίως μονότονες: είναι δυνατόν να υπάρχουν $\mathbb{P}, A, B$ ώστε $A \subset B$ αλλά $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$]

*4. $\forall A \in 2^{\Omega}$ έχουμε ότι $\Omega = (\Omega \cap A) \cup (\Omega - A)$ πι

κ' $(\Omega \cap A) \cap (\Omega - A) = \emptyset$

Όμως επίσης $\Omega \cap A = A \quad (A \subseteq \Omega)$

κ' $\Omega - A := A'$

Επομένως $1 \underset{\beta}{=} \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\big((\Omega \cap A) \cup (\Omega - A)\big)$

$\underset{\delta}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A')$

Επομένως $\mathbb{P}(A') = 1 - \mathbb{P}(A) \quad \forall A \in 2^{\Omega}$

[Νόμος της συμπληρωματικής πιθανότητας]

Από την *4 θα προέκυπτε άμεσα κ' η *1 θέτοντας $A = \emptyset$.

Συνεχίζεται ...