Διάλεξη 2

Χρήσιμες Έννοιες από την Συνολοθεωρία

- Δυναμοσύνολο
- Συνολοθεωρητικές Πράξεις
- Συνολοσυναρτήσεις

Εισαγωγή στη Θεωρία Πιθανοτήτων

- Θα προσπαθήσουμε να κατανοήσουμε την έννοια της κατανομής πιθανότητας επί του $\mathbb{R}$.
- Θα μας χρησιμεύσει πρότερη κατανόηση της έννοιας της κατανομής πιθανότητας επί γενικού συνόλου αναφοράς Ω $(\neq \emptyset)$
- Σε αδρές γραμμές:

Κατανομή πιθανότητας επί του Ω: συνάρτηση που σε κάθε υποσύνολο του Ω

ή σε κατάλληλα υποσύνολα του Ω

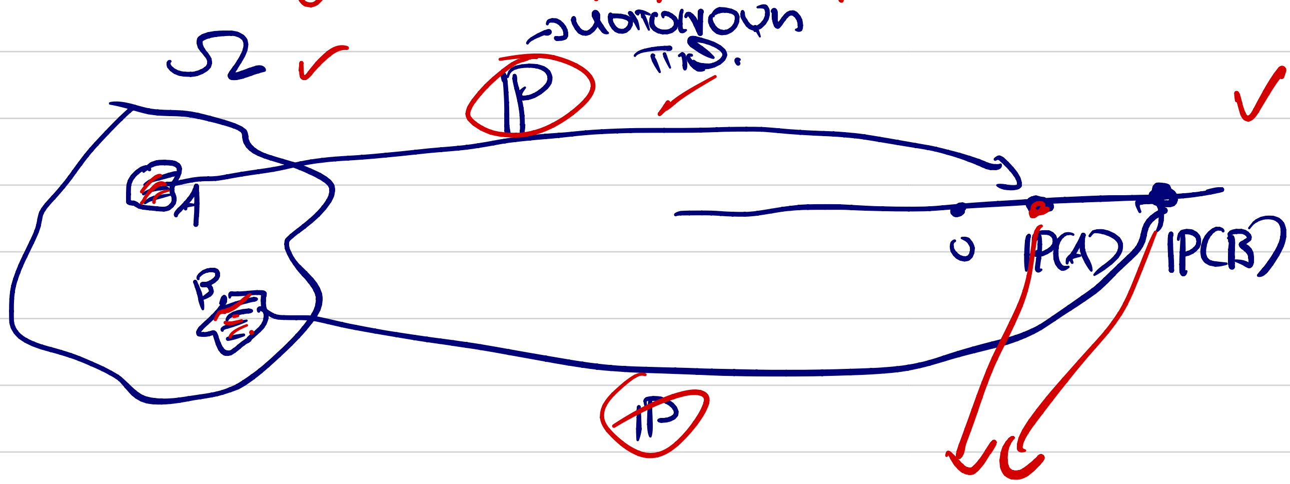
αποδίδει πραγματικό αριθμό (ο οποίος είναι η πιθανότητα αυτού του υποσυνόλου - κ' μπορεί καταρχάς να γίνει αντιληπτό ως ένα μορφή μεγέθους)

⇒ α. Η κατανομή πιθανότητας δεν έχει ως πεδίο ορισμού το Ω, αλλά συλλογή από υποσύνολα του Ω (είναι συνολοσυνάρτηση - set function)

β. Οι αριθμοί που αποδίδει (πιθανότητες) έχουν την έννοια του μεγέθους → επομένως για κατανομή πιθανότητας θα "μοιάζει" εν μέρει με άλλες μαθηματικές διαδικασίες απόδοσης μεγέθους [μέτρηση μηκών, εμβαδών, διαδικασίες ολοκλήρωσης]. Στις κατανομές πιθανότητας όμως θα υπάρχει κ' η ερμηνεία των πιθανοτήτων ως "δεικτών αβεβαιότητας" → όσο μεγαλύτερη η πιθανότητα που αποδίδεται σε κάποιο υποσύνολο τόσο "λιγότερο αβέβαιο" είναι.

Συσχέτιση με Στατ. II [Ω → στοιχειώδη ενδεχόμενα περιέχονται τώρα, υποσύνολα του → σύνθετα ενδεχόμενα, κ.ο.κ.]

γ. Οι ιδιότητες που θα πρέπει να ικανοποιεί για να είναι μια καλώς ορισμένη κατανομή πιθανότητας έχουν σχέση κ' με την συμπεριφορά της ως προς τις συνολοθεωρητικές πράξεις μεταξύ των υποσυνόλων του Ω [κ' συνάδουν με την διαίσθηση μας για την μέτρηση μεγεθών]



Αποδίδονται με τρόπο που συνάδει με την διαίσθηση μας για τις μετρήσεις μεγεθών.

πιθανότητες που μπορούν να γίνουν αντιληπτές ως "μεγέθη" των A, B → ερμηνεύονται ως "βαθμοί αβεβαιότητας" τους

Προκειμένου να μπορέσουμε να εξετάσουμε τα παραπάνω με μεγαλύτερη ακρίβεια μας χρειάζεται να θυμηθούμε κάποιες έννοιες από την συνολοθεωρία:

Έστω Ω σύνολο αναφοράς. Υποθέτουμε ότι $\Omega \neq \emptyset$ [Εάν επιτρέπαμε $\Omega = \emptyset$ θα καταλήγαμε σε αντίφαση στον ορισμό της κατανομής πιθανότητας - θα δούμε αργότερα γιατί]

Δυναμοσύνολο του Ω - Powerset.

"Προκύπτει" ότι το παρακάτω είναι καλώς ορισμένο:

Ορισμός. Δυναμοσύνολο (Powerset) του Ω, ονομάζεται η συλλογή όλων των υποσυνόλων του Ω (το συμβολίζουμε γενικά με $\underline{\underline{2^{\Omega}}}$ ή $\underline{\mathcal{P}(\Omega)}$)

Υπενθύμιση: Αν A σύνολο, το A θα ονομάζεται υποσύνολο του Ω $(A \subseteq \Omega)$ ανν

αν και μόνο αν

κάθε στοιχείο του A είναι κ' στοιχείο του Ω.

Έχουμε ότι $\Omega \subseteq \Omega$ κ' $\emptyset \subseteq \Omega$ (γιατί;) ☑ ✓

Παραδείγματα:

1. $\Omega = \{\alpha\}$ $\Rightarrow$ $2^{\Omega} = \{\emptyset, \{\alpha\}\}$

μονοσύνολο

$= \{\emptyset, \Omega\}$

(δεν μας ενδιαφέρει η φύση του αλλά μπορεί να θεωρηθεί ότι αφορά σε πείραμα τύχης με μοναδική (βέβαιη) έκβαση.

2. $\Omega = \{\alpha, \beta\}$ $\Rightarrow$ $2^{\Omega} = \{\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\alpha, \beta\}\}$

$= \{\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \Omega\}$

3. $\Omega=\{\alpha,\beta,\gamma\} \Rightarrow 2^{\Omega}=\{\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha,\beta\}, \{\alpha,\gamma\}, \{\beta,\gamma\}, \Omega\}$

Παρατηρήστε ότι όταν το πλήθος των στοιχείων του Ω είναι κ τότε το πλήθος των στοιχείων του 2^{Ω} είναι 2^{κ}: αυτό ισχύει γενικά κ' εξηγεί κ' τον συμβολισμό του δυναμοσυνόλου – περαιτέρω λεπτομέρειες έχουν να κάνουν με την αριθμητική των άπειρων αριθμών κ' βαθείς έννοιες συνολοθεωρίας οπότε παραλείπονται. Φαίνεται όμως ότι καθώς το Ω γίνεται "μεγαλύτερο" το 2^{Ω} γίνεται "πολυπλοκότερο".

4. $\Omega=\mathbb{R}$ [περίπλοκο σύνολο κ' αναπαραστηθεί – που είναι αδύνατον να καταγράψω εξαντλητικά το $2^{\mathbb{R}}$. Θα περιλαμβάνει σύνολα όπως τα $\{c\}$, $c\in\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $[0,1)$, $\mathbb{Q}$, κ.ο.κ.

Είναι τόσο "αχανές" που θα περιλαμβάνει κ' εξαιρετικά περίπλοκα στην περιγραφή υποσύνολα του $\mathbb{R}$ [π.χ. σύνολα πραγματικών αριθμών που ικανοποιούν περίπλοκες σχέσεις]. Η δυσκολία της "εξαντλητικής περιγραφής" του $2^{\mathbb{R}}$ βρίσκεται στον πυρήνα της ανάγκης να περιγράψουμε κατανομές πιθανότητας επί του $\mathbb{R}$ χρησιμοποιώντας πιο απλά αντικείμενα - όπως θα δούμε.

► Συνολοθεωρητικές σχέσεις και πράξεις (κ' άλγεβρα με τα στοιχεία του 2^{Ω})

* Υπενθύμιση: Τα στοιχεία του 2^{Ω} είναι τα υποσύνολα του Ω

Σχέση Εγκλεισμού:

- Αν $A,B\in 2^{\Omega}$ (ως $A,B\subseteq\Omega$) είναι δυνατόν επίσης $A\subseteq B$ ή $B\subseteq A$ ή να μην ισχύει τίποτα από τα δύο π.χ. στο παράδειγμα 3. $\{\alpha\} \subseteq \{\alpha,\beta\}$

$\{\beta\} \subseteq \{\beta,\gamma\}$ αλλά $\{\alpha\} \nsubseteq \{\beta\}$ κ' $\{\beta\} \nsubseteq \{\alpha\}$.

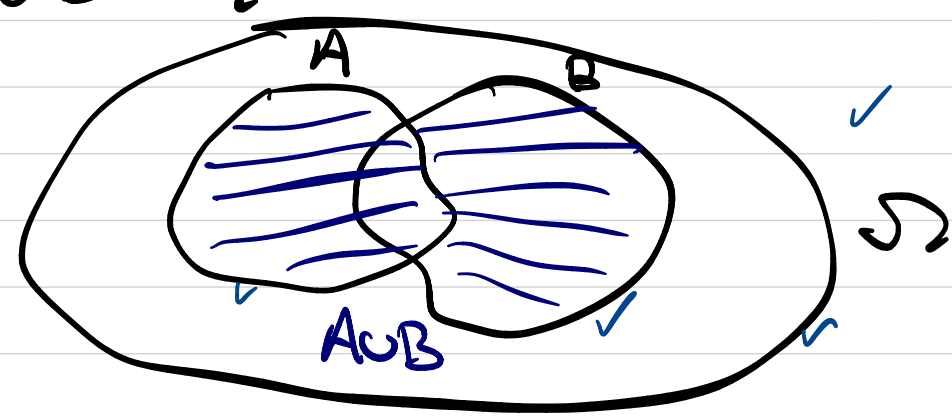
* Σε κάθε περίπτωση $\emptyset \subseteq A,\ \forall A \in 2^{\Omega}$
κ' $A \subseteq \Omega,\ \forall A \in 2^{\Omega}$.

Σημ. η σχέση $\subseteq$ μοιάζει εν μέρει με την σχέση $\leq$ που έχουμε στους πραγματικούς (όχι όμως απόλυτα). Το $\emptyset$ είναι το "μικρότερο" στοιχείο της σχέσης κ' το Ω είναι το "μεγαλύτερο".

Πράξη της ένωσης:

Αν $A, B \subseteq \Omega$ όπως προηγουμένως τότε

$$A \cup B = \{x \in \Omega : x \in A \text{ ή } x \in B\}$$



- Σε κάθε περίπτωση $A\cup B \in 2^{\Omega}$ ($\Leftrightarrow A\cup B\subseteq \Omega$)
- Η πράξη επεκτείνεται σε αυθαίρετο πλήθος παραγόντων, και ικανοποιεί ιδιότητες επιμερισμού: π.χ. $\underline{A\cup B}\cup\Gamma = (A\cup B)\cup\Gamma = A\cup(B\cup\Gamma)$

όπως κ' ιδιότητες μετάθεσης $A\cup B = B\cup A$

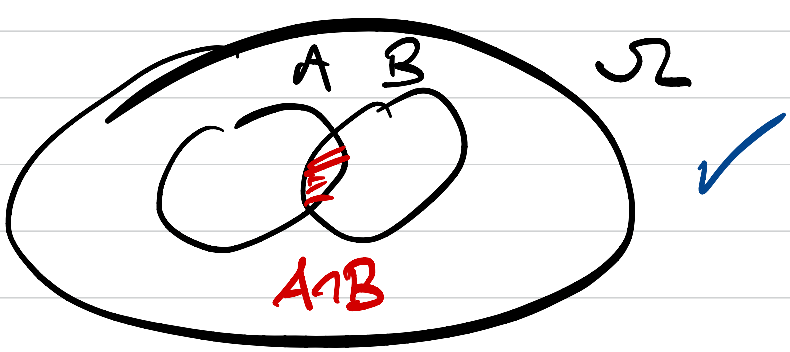
- $A\subseteq B \Leftrightarrow A\cup B = B$ (Αλληλεπίδραση με σχέση εγκλεισμού)

$A\cup\Omega=\Omega$ κ' $A\cup\emptyset=A$

→ η πράξη εμφανίζει ομοιότητες με την $+$ στο $\mathbb{R}$.

Πράξη της Τομής:

$$A\cap B = \{x\in\Omega : x\in A \text{ και } x\in B\}$$



- Σε κάθε περίπτωση $A \cap B \subseteq \Omega$ $(\mathcal{E}) \in 2^{\Omega}$)
- Ικανοποιεί ιδιότητες μετάθεσης $\underline{A \cap B = B \cap A}$
- Επεκτείνεται σε αυθαίρετο πλήθος παραγόντων
- Ικανοποιεί ιδιότητες επιμερισμού:

$$A \cap B \cap \Gamma = (A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma) \checkmark$$

- $\boxed{A \subseteq B \iff A \cap B = A}$ (αντιμετώπιση με την σχέση εγκλεισμού)

$A \cap \Omega = A$ κ $A \cap \emptyset = \emptyset$

→ η πράξη συμφωνίζει ιδιότητες με τον

- • στο $\mathbb{R}$.

$x, y, z \in \mathbb{R}$

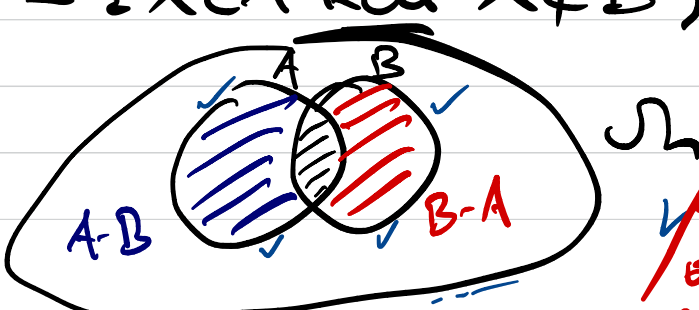
$x \cdot (y+z) = x \cdot y + xz$

Αντιμετώπιση Τομής κ' Ένωσης (Τέλος Διάλεξης 2.)

- $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$ ✓

Πράξη της συνολοθεωρητικής διαφοράς

$$A - B = \{x \in A \text{ και } x \notin B\}$$



Τα περί συνολοθεωρητικής διαφοράς, κ' συμπληρωμάτων παραγοντοποιήσεων θα τα εξετάσουμε στην διάλεξη 3 για να συνεχίσουμε την προετοιμασία για τον ορισμό της κατανομής πιθανότητας επί του Ω

- $A-B \in 2^{\Omega}$ $(\iff A-B \subseteq \Omega)$
- Η πράξη δεν είναι μεταθετική
- $A \subseteq B \iff A-B = \emptyset$

Συμπληρώματα:

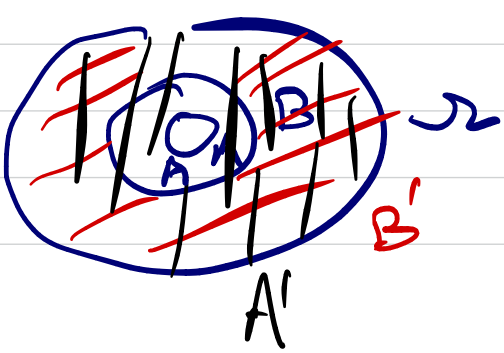
$$A' = \Omega - A = \{x \in \Omega \text{ και } x \notin A\}$$

οπότε $A-B = \{x \in A \text{ και } x \notin B\} = \{x \in A \text{ και } x \in \Omega \text{ και } x \notin B\} = \{x \in A \text{ και } (x \in \Omega \text{ και } x \notin B)\} =$

$$= A \cap B' \quad (*)$$

Αλληλεπίδραση Συμπληρωμάτων με την σχέση εγκλεισμού

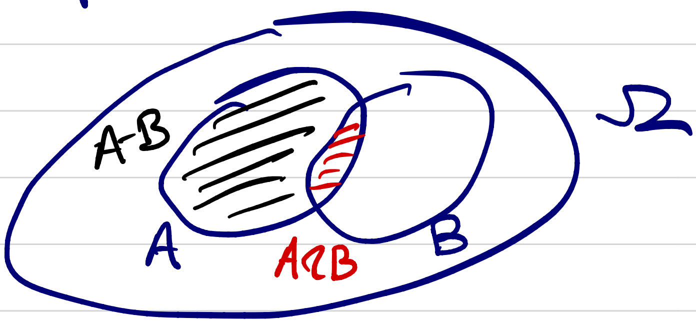
$$A \subseteq B \iff B' \subseteq A'$$ (αντιμονοτονία του ')



και $\Omega' = \emptyset$ ενώ $\emptyset' = \Omega$ κ.ο.κ.

Παραγοντοποίηση υποσυνόλου του Ω ως ένωση ξένων μεταξύ τους παραγόντων χρησιμοποιώντας βοηθητικό υποσύνολο του A.

Έστω και πάλι $A, B \subseteq \Omega$. Έχουμε ότι



$$A = (A\cap B) \cup (A-B) \quad \Pi_1 \quad \left[(A\cap B)\cap(A-B)=\emptyset\right]$$

$$\overset{(*)}{=} (A\cap B) \cup (A\cap B') \quad \Pi_2$$

* Οι Π_1 κ Π_2 προσφέρουν έκφραση του A ως "ξένη ένωση παραγόντων που σχετίζονται με το βοηθητικό υποσύνολο B. Σημαντικό σε

Διαδικασίες μέτρησης και απόδοσης "μεγέθους":

Αν θέλουμε να αποδώσουμε μέγεθος στο A κ' υπάρχει B τέτοιο ώστε να είναι εύκολο να γνωρίζουμε το μέγεθος του $A \cap B$ κ' του $A \cap B'$ τότε μπορούμε να χρησιμοποιούμε τα παραπάνω κ' το Π2 για να "βρούμε το μέγεθος του A".

▶ Πραγματικές συνολοσυναρτήσεις

Δεδομένου του συνόλου αναφοράς (επί του Ω) αναμένουμε ότι όποια κατανομή πιθανότητας θα είναι συνάρτηση που ορίζεται στο 2^{Ω} (ή σε υποσυλλογή του), θα αποδίδει πραγματικούς αριθμούς κ' θα ικανοποιεί κάποιες ιδιότητες. Αξίζει να έχουμε υπόψη την έννοια της πραγματικής συνολοσυνάρτησης (real set function):

Ορισμός. Έστω Ω $(\neq \emptyset)$ σύνολο αναφοράς.
Πραγματική συνολοσυνάρτηση επί του Ω καλείται όποια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το 2^{Ω} (ή κάποια κατάλληλη υποσυλλογή του) κ' πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$.

* Μια τέτοια συνάρτηση υπολογίζεται σε υποσύνολα του Ω, όχι σε στοιχεία του, και αποδίδει πραγματικούς αριθμούς.

Παράδειγμα 1. $\Omega = \{\alpha\}$, $2^{\Omega} = \{\emptyset, \Omega\}$

$G : 2^{\Omega} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως

$$G(\emptyset) = -1, \quad G(\Omega) = 1$$

Παράδειγμα 2. $\Omega = \{\alpha, \beta\}$, $2^{\Omega} = \{\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \Omega\}$

$Q : 2^{\Omega} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως

$$Q(\emptyset) = 0, \quad Q(\{\alpha\}) = 1/3, \quad Q(\{\beta\}) = 2/3, \quad Q(\Omega) = 1$$

Συνεχίζεται...