Φροντιστήριο 8

Όπως αναφέρθηκε στις Διαλέξεις, αν $\mathbb{P}$ κατανομή πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ κατάλληλη συνάρτηση, το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} g\,d\mathbb{P}$ μπορεί να ορίζεται για οποιαδήποτε κατανομή πιθανότητας $\mathbb{P}$ εφόσον η g έχει την ιδιότητα της τυχαίας μεταβλητής.
Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι κάθε συνεχής ή παραγωγίσιμη συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ είναι τυχαία μεταβλητή.
Όποια συνάρτηση g συναντήσουμε θα έχει επιλεγεί ώστε να είναι τυχαία μεταβλητή (επομένως, δεν μας νοιάζει να δούμε αυστηρά ποιες συναρτήσεις είναι τυχαίες μεταβλητές).

- Ορισμός: Αναμενόμενη τιμή τυχαίας μεταβλητής (Πιττής, σελ. 316)

Έστω ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \Sigma_\Omega, \mathbb{P})$, η τυχαία μεταβλητή $X:\Omega\to\mathbb{R}$, η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $\mathbb{P}_X$ και η μετρήσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Η $g(X)$ είναι τυχαία μεταβλητή ως προς τον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \Sigma_\Omega, \mathbb{P})$.
Στην περίπτωση που η X είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή, με τιμές x_i και συνάρτηση πιθανότητας $\mathbb{P}(\{x_i\})$, η αναμενόμενη (ή μέση) τιμή της $g(X)$, δεδομένου ότι υπάρχει στον $\mathbb{R}$, δίνεται από:

$$E(g(X)) = \sum_i g(x_i)\,\mathbb{P}(\{x_i\})$$

Στην περίπτωση που η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή, η αναμενόμενη τιμή της $g(X)$, δεδομένου ότι υπάρχει, χρησιμοποιώντας την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f_X δίνεται ως εξής:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,f_X(x)\,dx$$

, όπου f_X είναι η συνάρτηση πυκνότητας της $\mathbb{P}$ της τυχαίας μεταβλητής X.

Παρατηρήσεις.

i) Είναι δυνατόν η $E(g)$ να μην υπάρχει για κάποιες g και $\mathbb{P}$ εξαιτίας απειρισμών, απροσδιοριστιών κ.ο.κ. Θα λέμε ότι η $E(g)$ υπάρχει αν και μόνο αν $E(g) \in \mathbb{R}$. Στην περίπτωση όπου η $E(g)$ υπάρχει, η g ονομάζεται ολοκληρώσιμη (integrable) ως προς την $\mathbb{P}$.

ii) Η $E(g)$ εξαρτάται τόσο από την $g(X)$ όσο και από την $\mathbb{P}$.

iii) Όταν η $\mathbb{P}$ διακριτή με πεπερασμένο supp τότε η $E(g)$ υπάρχει για κάθε g τυχαία μεταβλητή.

• Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι το να γνωρίζουμε το $E(g)$ για δεδομένη $\mathbb{P}$ και κάθε δυνατή g, ισοδυναμεί με το να γνωρίζουμε την κατανομή πιθανότητας $\mathbb{P}$ και συνεπώς, μπορούμε να χρησιμοποιούμε αυτά τα ολοκληρώματα προκειμένου να βρίσκουμε τις πιθανότητες που αποδίδει η $\mathbb{P}$.
Ουσιαστικά, η $E(g)$ κάθε σχετικής g μας δίνει "πληροφορία" για ιδιότητες της κατανομής.
Από όλες τις δυνατές συναρτήσεις $g(X)$ μιας τυχαίας μεταβλητής X ιδιαίτερη σημασία για τη θεωρία πιθανοτήτων έχουν οι μορφές $g(X) = X^k$, $k = 1, 2, \ldots$. Αυτή η οικογένεια συναρτήσεων χρησιμοποιείται για τον ορισμό των ροπών τάξης k μιας τυχαίας μεταβλητής X.

Ροπές Κατανομής Πιθανότητας

▶ Ορισμός: έστω κατανομή $\mathbb{P}$ στο $\mathbb{R}$ και X τυχαία μεταβλητή με $X \sim \mathbb{P}$. Τότε η ροπή k-τάξης της $\mathbb{P}$ είναι το ολοκλήρωμα της $g(X) = X^k$ ως προς την $\mathbb{P}$ (δηλαδή η αναμενόμενη τιμή της συνάρτησης $g(X) = X^k$, $k = 1, 2, \ldots$).

$$E(X^k) = \begin{cases} \sum\limits_{i \in supp} i^k \, \mathbb{P}(\{i\}) & , \mathbb{P} \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\,dx & , \text{ όπου η } f \text{ είναι pdf της } \mathbb{P} \end{cases}$$

- Η απόλυτη ροπή κ-τάξης, δηλαδή η αναμενόμενη τιμή της συνάρτησης $g(X) = |X|^k$, $k=1,2,\ldots$, ορίζεται ως:

$$E(|X|^k) = \begin{cases} \sum_{i \in supp} |i|^k \, \mathbb{P}(\{i\}) & , \mathbb{P} \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k f(x)\,dx & , \text{όπου η } f \text{ είναι pdf της } \mathbb{P} \end{cases}$$

- Γνωρίζοντας τις ροπές μιας κατανομής ισοδυναμεί με το να γνωρίζουμε την κατανομή πιθανότητας $\mathbb{P}$ και συνεπώς, μπορούμε να βρούμε τις πιθανότητες που αποδίδει η $\mathbb{P}$. Επιπλέον, οι ροπές μας δίνουν πληροφορίες για το σχήμα της κατανομής.

<u>Άσκηση 1</u>

Έστω X τυχαία μεταβλητή που αναπαριστά το αποτέλεσμα της ρίψης ενός αμερόληπτου ζαριού. Να βρεθεί η ροπή $2^{ης}$ τάξης και η διακύμανση της X.

<u>Λύση</u>

Γνωρίζουμε ότι $supp = \{1,2,3,4,5,6\}$ και $\mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{6}$, $\forall\, i \in supp$

Ροπή $1^{ης}$ τάξης: $E(X) = \sum_{i \in supp} \{i\} \cdot \mathbb{P}(\{i\}) = \sum_{i=1}^{6} i \cdot \mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6}$

Ροπή $2^{ης}$ τάξης $(k=2)$:

$$E(X^2) = \sum_{i \in supp} i^2 \, \mathbb{P}(\{i\}) = \sum_{i=1}^{6} i^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)$$

$$\Rightarrow E(X^2) = \frac{91}{6}$$

Διακύμανση: $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = 15{,}17 - 12{,}25 \simeq 2{,}92$

Άσκηση 2

Έστω τυχαία μεταβλητή $X \sim exp(\lambda)$ με $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \alpha^x$, όπου $0 < \alpha < e$ ($e \simeq 2.71828$). Να βρεθεί η αναμενόμενη τιμή της g ως προς την κατανομή της X. Δίνεται η pdf της εκθετικής κατανομής. Για λόγους απλούστευσης θεωρούμε ότι $\lambda = 1$.

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Λύση

$$E(g(x)) = E(\alpha^x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^x f(x) dx =$$

$$= \cancel{\int_{-\infty}^{0} \alpha^x \cdot 0 \, dx}^{\,0} + \int_0^{+\infty} \alpha^x e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} \alpha^x e^{-x} dx = -\int_0^{+\infty} \alpha^x (-e^{-x}) dx \overset{(*)}{=}$$

$$= -\int_0^{+\infty} \alpha^x (e^{-x})' dx =$$

$$= -\left\{ \left[\alpha^x e^{-x} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-x} (\alpha^x)' dx \right\} =$$

$$\overset{(**)}{=} -\left[\alpha^x e^{-x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \alpha^x \ln\alpha \, e^{-x} dx =$$

$$= -\left\{ \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\alpha}{e} \right)^x - \alpha^0 e^0 \right\} + \ln\alpha \int_0^{+\infty} \alpha^x e^{-x} dx =$$

$$\overset{(***)}{=} -\{0 - 1\} + \ln\alpha \, E(\alpha^x) = 1 + \ln\alpha \, E(\alpha^x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(\alpha^x) = 1 + \ln\alpha \, E(\alpha^x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E(\alpha^x) = \frac{1}{1 - \ln\alpha}}$$

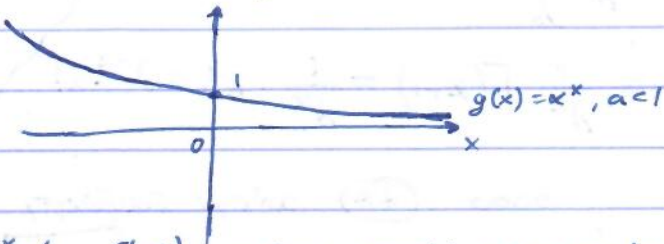
η αναμενόμενη τιμή της g ως προς την κατανομή της X

(*) Εφαρμόσαμε παραγοντική ολοκλήρωση:
Γενικά: $\int_\alpha^\beta h' g = hg \Big|_a^\beta - \int_a^\beta h g'$
Στην συγκεκριμένη άσκηση έχουμε: $h(x) = e^{-x}$, $g(x) = \alpha^x$

(**) Note: $(\alpha^x)' = \frac{d}{dx}(\alpha^x) = \alpha^x \ln\alpha$

(***) όπου $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^x = 0$ γιατί από την υπόθεση έχουμε $0<\alpha<e \Rightarrow 0<\frac{\alpha}{e}<1$ και επομένως, γενικά σε συναρτήσεις της μορφής $g(x)=\alpha^x$ με $\alpha<1$ έχουμε $\lim_{x\to+\infty}\alpha^x=0$.

Αυτό φαίνεται κι από το σχήμα της $g(x)=\alpha^x$ με $0<\alpha<1$.



Επίσης, έχουμε $\int_0^{+\infty}\alpha^x e^{-x}dx = E(a^x)$ από τον ορισμό της αναμενόμενης τιμής $E(g)$ δεδομένου ότι $g(x)=\alpha^x$ και η συν. πυκνότητας $f(x)=e^{-x}, x\geq 0$ (έχοντας υποθέσει $\lambda=1$).

Άσκηση 3

Έστω $X\sim exp(\lambda)$, $\lambda>0$. Να βρεθεί η απόλυτη ροπή κ-τάξης και ακολούθως, να δειχτεί ότι $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Δίνονται:

- Η pdf της εκθετικής κατανομής: $f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$
- συνάρτηση Γάμμα: $\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t}dt = \Gamma(a+1)=\alpha!$
- $supp=[0,+\infty)$.

Λύση

Από ιδιότητες ροπών γνωρίζουμε ότι εφόσον το στήριγμα της κατανομής είναι $[0,+\infty)$, η ροπή κ-τάξης ταυτίζεται με την απόλυτη ροπή κ-τάξης, $E(X^\kappa)=E(|X|^\kappa)$.

$$E(X^\kappa) = \int_{supp} x^\kappa f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x^\kappa \cdot \lambda e^{-\lambda x}\,dx \overset{\text{πολλαπλασιάζουμε κ' διαιρούμε με } \lambda^\kappa}{=}$$

$$= \int_0^{+\infty} x^\kappa \cdot \frac{\lambda^\kappa}{\lambda^\kappa} \cdot \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{\lambda}{\lambda^\kappa} \int_0^{+\infty} (\lambda x)^\kappa e^{-\lambda x}\,dx \overset{(*)}{=}$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda^\kappa} \int_0^{+\infty} t^\kappa e^{-t} \left(\frac{1}{\lambda} dt\right) =$$

$$= \frac{1}{\lambda^\kappa} \int_0^{+\infty} t^\kappa e^{-t}\,dt \overset{(**)}{=}$$

$$= \frac{1}{\lambda^\kappa} \Gamma(\kappa+1) = \frac{1}{\lambda^\kappa} \cdot \kappa! = \lambda^{-\kappa} \cdot \kappa!$$

(*) <u>αλλαγή μεταβλητής</u>

θέτουμε $\boxed{t = \lambda x} \Rightarrow dt = \lambda dx \Rightarrow dx = \frac{1}{\lambda} dt$

<u>όρια ολοκλήρωσης:</u>

$$\left.\begin{array}{l} x = +\infty \Rightarrow t = +\infty \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \end{array}\right\} \text{νέα όρια}$$

όπου (**) από την εκφώνηση δίνεται ότι: $\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt = \Gamma(\alpha+1)$

άρα για $\boxed{\alpha = \kappa}$ έχουμε $\int_0^{+\infty} t^\kappa e^{-t} dt = \Gamma(\kappa+1) = \kappa!$

άρα $E(X^\kappa) = E(|X|^\kappa) = \lambda^{-\kappa} \cdot \kappa!$ η ροπή κ-τάξης

<u>υπολογισμός ροπών</u>

για $\kappa=1$, ροπή 1ης τάξης: $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

για $\kappa=2$, ροπή 2ης τάξης: $E(X^2) = \frac{1}{\lambda^2} \cdot 2! = \frac{2}{\lambda^2}$

άρα η διακύμανση είναι:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Άσκηση 4

Έστω $X \sim Gamma(\alpha, b)$, όπου $\alpha, b > 0$. Να βρείτε τη ροπή κ-τάξης της κατανομής και να δείξετε ότι $Var(X) = \frac{a}{b^2}$.

Δίνονται:

- pdf της Γάμμα κατανομής: $f(x;a,b) = \begin{cases} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \cdot x^{a-1} e^{-bx}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$
- $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} \, dt = (a-1)!$
- $supp = [0, +\infty)$

Λύση

$$E(X^\kappa) = \int_{supp} x^\kappa f(x;a,b)\,dx = \int_0^{+\infty} x^\kappa \cdot \frac{b^a}{\Gamma(a)} \cdot x^{a-1} e^{-bx}\,dx =$$

$$= \frac{b^\alpha}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} x^\kappa \cdot x^{a-1} e^{-bx}\,dx = \frac{b^\alpha}{\Gamma(a)} \cdot \int_0^{+\infty} x^{\kappa+a-1} e^{-bx}\,dx =$$

$$\xrightarrow[\text{με } b^{\kappa+a-1}]{\text{πολ/ζουμε \& διαιρούμε}} \frac{b^\alpha}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} x^{\kappa+a-1} \cdot \frac{b^{\kappa+a-1}}{b^{\kappa+a-1}} \cdot e^{-bx}\,dx =$$

$$= \frac{b^\alpha}{b^{\kappa+a-1}\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} (bx)^{\kappa+a-1} \cdot e^{-bx}\,dx \overset{*}{=}$$

$$= \frac{b^\alpha}{b^{\kappa+a-1}\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} t^{\kappa+a-1} e^{-t} \left(\frac{1}{b}\,dt\right) =$$

$$= \frac{b^\alpha}{b^{\kappa+a-1}\Gamma(a) \cdot b} \underbrace{\int_0^{+\infty} t^{\kappa+a-1} e^{-t}\,dt}_{\Gamma(a+\kappa)} =$$

(*) Αλλαγή μεταβλητής

θέτουμε $\boxed{t = bx} \Rightarrow dt = b\,dx \Rightarrow dx = \frac{1}{b}\,dt$

όρια ολοκλήρωσης:

$\left.\begin{array}{l} x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = +\infty \rightarrow t = +\infty \end{array}\right\}$ νέα όρια

$$\overset{**}{=} \frac{1}{b^\kappa \Gamma(a)} \Gamma(a+\kappa) = b^{-\kappa} \frac{(a+\kappa-1)!}{(\alpha-1)!}$$

όπου (**) από εκφώνηση έχουμε: $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\,dt = (a-1)!$

άρα για $\alpha = \alpha + \kappa$ έχουμε:

$$\Gamma(a+\kappa) = \int_0^{+\infty} t^{a+\kappa-1} e^{-t}\,dt = (\alpha+\kappa-1)!$$

Άρα η ροπή κ-τάξης της κατανομής είναι:

$$E(X^k) = b^{-k}\frac{(a+k-1)!}{(a-1)!}$$

Ροπή 1ης τάξης: $k=1 \Rightarrow E(X) = b^{-1}\frac{\alpha!}{(a-1)!} = \frac{1}{b}\cdot\frac{\cancel{1}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdots\cancel{(a-1)}\,a}{\cancel{1}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdots\cancel{(a-1)}} \Rightarrow$

$$\boxed{E(X) = \frac{\alpha}{b}}$$

Ροπή 2ης τάξης: $k=2 \Rightarrow E(X^2) = \frac{1}{b^2}\frac{(a+1)!}{(\alpha-1)!} = \frac{1}{b^2}\frac{\cancel{1}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdots\cancel{(a-1)}\,a(a+1)}{\cancel{1}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdots\cancel{(a-1)}}$

$$\Rightarrow \boxed{E(X^2) = \frac{\alpha(a+1)}{b^2}}$$

Για την ροπή 3ης τάξης, αν θέλαμε να την υπολογίσουμε,

$$k=3 \ldots \Rightarrow E(X^3) = \frac{a(a+1)(a+2)}{b^3}$$

Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία για όποια μεγαλύτερη ροπή θέλαμε να βρούμε.

Άρα, η διακύμανση είναι: $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 =$

$$= \frac{a(a+1)}{b^2} - \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a(a+1)}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{Var(X) = \frac{a}{b^2}}$$

Άσκηση 5

Έστω $X \sim Weibull(a,b)$ όπου $a,b>0$. Να βρείτε την ροπή κ-τάξης και να δείξετε ότι $Var(X) = \frac{\Gamma(1+2a^{-1}) - \Gamma(1+a^{-1})^2}{b^2}$.

Δίνονται:

- Η pdf της κατανομής Weibull(a,b):

$$f(x;a,b) = \begin{cases} a\cdot b^{\alpha} x^{a-1} e^{-(bx)^a} & , x>0 \\ 0 & , x\le 0 \end{cases}$$

- Συνάρτηση Γάμμα: $\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt = \Gamma(a) = (a-1)!$

<u>Λύση</u>

$$E(X^k) = \int_{supp} x^k f(x;a,b)\, dx = \int_0^{+\infty} x^k \left[a \cdot b^a x^{a-1} e^{-(bx)^a}\right] dx$$ πολ/ζουμε & διαιρούμε με b^k

$$= \int_0^{+\infty} \frac{b^k}{b^k} \cdot x^k \left[a \cdot b^a x^{a-1} e^{-(bx)^a}\right] dx =$$

$$= \frac{1}{b^k} \int_0^{+\infty} (bx)^k \left[a\, b^a x^{a-1} e^{-(bx)^a}\right] dx =$$

$$= \frac{1}{b^k} \int_0^{+\infty} \left\{\left[(bx)^a\right]^{1/a}\right\}^k \cdot a \cdot b^a x^{a-1} e^{-(bx)^a} dx \overset{*}{=}$$

(*) αλλαγή μεταβλητής

θέτουμε $\boxed{t = (bx)^a} \Rightarrow$

$\Rightarrow dt = a b^a x^{a-1} dx \Rightarrow$

$\Rightarrow dx = \dfrac{1}{a b^a x^{a-1}} dt$

<u>Νέα όρια</u>: $x = 0 \Rightarrow t = 0$

$x = +\infty \Rightarrow t = +\infty$

$$= \frac{1}{b^k} \int_0^{+\infty} \left[(t)^{1/a}\right]^k \cancel{a b^a x^{a-1}} e^{-t} \left(\frac{1}{\cancel{a b^a x^{a-1}}} dt\right) =$$

$$= \frac{1}{b^k} \underbrace{\int_0^{+\infty} t^{k/a} e^{-t} dt}_{\Gamma\left(\frac{k}{a}+1\right)} = \frac{1}{b^k} \Gamma\left(\frac{k}{a}+1\right)$$

από συνάρτηση για $\boxed{\alpha = \frac{k}{a}+1}$

<u>άρα</u> η ροπή k-τάξης είναι: $E(X^k) = \dfrac{1}{b^k} \Gamma\left(\dfrac{k}{a}+1\right)$

Ροπή 1ης τάξης: $k=1 \Rightarrow E(X) = \dfrac{1}{b} \Gamma\left(\dfrac{1}{a}+1\right)$

Ροπή 2ης τάξης: $k=2 \Rightarrow E(X^2) = \dfrac{1}{b^2} \Gamma\left(\dfrac{2}{a}+1\right)$

<u>άρα</u>

διακύμανση: $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \dfrac{1}{b^2} \Gamma\left(\dfrac{2}{a}+1\right) - \left[\dfrac{1}{b} \Gamma\left(\dfrac{1}{a}+1\right)\right]^2$

$$\Rightarrow Var(X) = \frac{\Gamma(1+2a^{-1}) - \Gamma(1+a^{-1})^2}{b^2}$$