Φροντιστήριο 3

► **Ορισμός**: Αντίστροφη Εικόνα

Έστω συνάρτηση $f:\Omega \to \mathbb{R}$. Τότε ορίζεται η αντίστροφη εικόνα του A, μέσω της f, ως το σύνολο των σημείων του Ω τα οποία απεικονίζονται μέσω της f στο A. Δηλαδή,

$$f^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in A\}$$

Παραδείγματα

Έστω $\Omega = \mathbb{R}$ και $f(\omega) = \omega^2$

Όταν $A = \{0\}$, η αντίστροφη εικόνα είναι:

$$f^{-1}(\{0\}) = \{\omega \in \mathbb{R} : f(\omega) = 0\} = \{\omega \in \mathbb{R} : \omega^2 = 0\} = \{0\}$$

· Όταν $A = \{1\}$: $f^{-1}(\{1\}) = \{\omega \in \mathbb{R} : f(\omega) = 1\} = \{\omega \in \mathbb{R} : \omega^2 = 1\} = \{-1, 1\}$

· Όταν $A = [1,4]$: $f^{-1}([1,4]) = \{\omega \in \mathbb{R} : f(\omega) \in [1,4]\} = \{\omega \in \mathbb{R} : \omega^2 \in [1,4]\} = \{\omega \in \mathbb{R} : 1 \leq \omega^2 \leq 4\} = [-2,-1] \cup [1,2]$

· Όταν $A = (-\infty, 0)$: $f^{-1}((-\infty,0)) = \{\omega \in \mathbb{R} : f(\omega) \in (-\infty,0)\} = \{\omega \in \mathbb{R} : \omega^2 \in (-\infty,0)\} = \emptyset$ διότι $\omega^2 \geq 0$ πάντα

· Όταν $A = \mathbb{R}$: $f^{-1}(\mathbb{R}) = \{\omega \in \mathbb{R} : f(\omega) \in \mathbb{R}\} = \{\omega \in \mathbb{R} : \omega^2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

· Όταν $A = \emptyset$: $f^{-1}(\emptyset) = \{\omega \in \mathbb{R} : f(\omega) \in \emptyset\} = \{\omega \in \mathbb{R} : \omega^2 \in \emptyset\} = \emptyset$

Note: Αν το A είναι οποιοδήποτε υποσύνολο του πεδίου ορισμού Ω, τότε το $f(A)$ είναι το υποσύνολο του πεδίου τιμών $\mathbb{R}$ που αποτελείται από όλες τις εικόνες των στοιχείων του A. Λέμε το $f(A)$ είναι εικόνα του A. Η εικόνα της f δίνεται απ' την $f(\Omega)$. Αντίθετα, η αντίστροφη εικόνα ενός υποσυνόλου B του πεδίου τιμών $\mathbb{R}$ κάτω από μία συνάρτηση f είναι το υποσύνολο του πεδίου ορισμού Ω που ορίζεται από την $f^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in B\}$.

Τυχαίες Μεταβλητές (Random variables)

Η θεωρία πιθανοτήτων ασχολείται με τη μελέτη φαινομένων που υπόκεινται σε αβεβαιότητα και προσπαθεί να ποσοτικοποιήσει την αβεβαιότητα σχετικά μ' ένα τυχαίο πείραμα. Για παράδειγμα, το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού ή η μεταβολή της τιμής μιας μετοχής δεν μπορούν να προβλεφθούν με βεβαιότητα.
Τέτοιες μεταβλητές ονομάζονται τυχαίες ή στοχαστικές.
Η τυχαία μεταβλητή X ορίζεται σε κάποιο δειγματικό χώρο Ω.
Στην περίπτωση του ζαριού έχουμε $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και στην περίπτωση της μετοχής έχουμε $\Omega = [0.10, 0.10]$
Όπως έχουμε ήδη αναφέρει σε κάθε στοιχείο του δειγμ. χώρου Ω αντιστοιχούμε μία πιθανότητα p_i και συμβολίζουμε ως εξής:

$$p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$$

όπου p_i είναι η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να λάβει την τιμή x_i.
Άρα, η τυχαία μεταβλητή δεν είναι τίποτα άλλο παρά μία πραγματική συνάρτηση η οποία δημιουργεί αντιστοιχία μεταξύ των μετρήσιμων υποσυνόλων Σ_Ω του Ω (πεδίου ορισμού της) και των πραγματικών αριθμών (πεδίο τιμών της).
Πρόκειται για μία έννοια ιδιαίτερα χρήσιμη γιατί μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή κατανομών επους πραγματικούς.

▶ $\boxed{\text{Ορισμός}}$: Τυχαία Μεταβλητή

Έστω οι μετρήσιμοι χώροι (Ω, Σ_Ω) και $(\mathbb{R}, \Sigma_{\mathbb{R}})$. Τυχαία μεταβλητή θα ονομάζεται οποια συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε αν $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ τότε η ~~α~~ντίστροφη εικόνα του (ή προ-εικόνα), ~~μ~~έσω της $X(\cdot)$, $X^{-1}(A) \in \Sigma_\Omega$.

Δηλαδή, οτιδήποτε μπορεί να μετρηθεί στο $\mathbb{R}$ έχει προκύψει ως εικόνα μέσω της X από κάτι που μπορεί να μετρηθεί στον Ω.

Ουσιαστικά, η τυχαία μεταβλητή μετασχηματίζει ένα μετρήσιμο χώρο σ' έναν άλλο μετρήσιμο χώρο και μας επιτρέπει να ορίσαμε νέες πιθανότητες.

<u>Παραδείγματα</u>

1. $\Omega = \{\alpha, b\}$, $\Sigma_\Omega = 2^\Omega = \{\{\alpha\}, \{b\}, \phi, \Omega\}$
και τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \to \mathbb{R}$
όπου $X(\alpha) = 0$ και $X(b) = 1$

Αν $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ τότε $X^{-1}(A) = \begin{cases} \phi, & \text{αν } 0, 1 \notin A \\ \{\alpha\}, & \text{αν } 0 \in A, 1 \notin A \\ \{b\}, & \text{αν } 0 \notin A, 1 \in A \\ \Omega, & \text{αν } 0, 1 \in A \end{cases}$

όπου $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$

Συνεπώς αφού $\phi, \Omega, \{\alpha\}, \{b\} \in \Sigma_\Omega$, η X είναι τυχαία μεταβλητή.

2. $\Omega = \{k\}$, $\Sigma_\Omega = \{\phi, \Omega\}$
και τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \to \mathbb{R}$
όπου $X(k) = c$

Αν $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ τότε $X^{-1}(A) = \begin{cases} \phi, & \text{αν } c \notin A \\ \Omega, & \text{αν } c \in A \end{cases}$

Έστω $c = 6$. Να βρεθεί η $X^{-1}(A)$, $X^{-1}(B)$, $X^{-1}(\Gamma)$

για $A = (-4, -2) \cup (0, 3) \Rightarrow X^{-1}(A) = \phi$, $6 \notin A$

$B = (4, 5) \cap \{6\} \Rightarrow X^{-1}(B) = \phi$, $6 \notin B$

$\Gamma = (0, 6] \Rightarrow X^{-1}(\Gamma) = \Omega$, $6 \in \Gamma$

Παρατηρήσεις

1. Ο παραπάνω ορισμός θέτει στην συνάρτηση $X: \Omega \to \mathbb{R}$ την απαίτηση ότι η αντίστροφη εικόνα $X^{-1}(A)$, $\forall A \in \Omega$ να ανήκει στο Σ_Ω (δηλαδή μία συλλογή μετρήσιμων υποσυνόλων του Ω), προκειμένου να ονομάσουμε την X τυχαία μεταβλητή. Αυτή η συνθήκη έχει πραγματική ισχύ μόνο στην περίπτωση κατά την οποία ο χώρος ενδεχομένων δεν ταυτίζεται με το δυναμοσύνολο του δειγματικού χώρου 2^Ω (ή $P(\Omega)$).
Όταν ο δειγμ. χώρος Ω είναι πεπερασμένος, οπότε το Σ_Ω μπορεί να επιλεγεί ώστε να εμπεριέχει όλα τα υποσύνολα του Ω, δηλ. ο χώρος ενδεχομένων θα είναι το δυναμοσύνολο του Ω, τότε κάθε συνάρτηση $X: \Omega \to \mathbb{R}$ είναι τυχαία μεταβλητή γιατί για οποιαδήποτε συνάρτηση X, όλες οι προ-εικόνες $X^{-1}(A)$ θα είναι υποχρεωτικά μέλη του δυναμοσυνόλου του Ω, δηλ. $X^{-1}(A) \subseteq \Omega$ οπότε και θα ανήκει στο $\Sigma_\Omega = 2^\Omega$.

2. Υπάρχουν πραγματικές συναρτήσεις που δεν είναι τυχαίες μεταβλητές. π.χ. όταν $(\Omega, \Sigma_\Omega) = (\mathbb{R}, \Sigma_{\mathbb{R}})$ γνωρίζουμε ότι υπάρχει υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ που είναι μη μετρήσιμο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών δηλ. $A \notin \Sigma_{\mathbb{R}}$.

3. Η προ-εικόνα $X^{-1}(A)$, $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ απεικονίζει σύνολα του πεδίου τιμών ($\mathbb{R}$) σε υποσύνολα του δειγμ. χώρου (Σ_Ω). Αναφορικά με την απεικόνιση $X^{-1}(\cdot)$ ισχύει ότι:
Αν $A \subset \mathbb{R}$ και $B \subset \mathbb{R}$ με $A \cap B = \emptyset$ τότε
$$[X^{-1}(A)] \cap [X^{-1}(B)] = \emptyset$$

4. Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι κάθε συνεχής και παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ είναι τυχαία μεταβλητή. Άρα, οι "οικείες" συναρτήσεις που έχουμε συναντήσει είναι τυχαίες μεταβλητές.

Κατανομές από Μεταφορά

Οι τυχαίες μεταβλητές μεταφέρουν τις κατανομές πιθανότητας στους πραγματικούς. Αν θέλουμε να προσδώσουμε πιθανότητα σ' ένα μετρήσιμο υποσύνολο των πραγματικών, βρίσκουμε την αντίστροφη εικόνα αυτού μέσω της τυχαίας μεταβλητής X και αποδίδουμε σε αυτή πιθανότητα μέσω της κατανομής $\mathbb{P}$ που υπάρχει ήδη στον δειγματικό χώρο Ω.

Ορισμός

Έστω ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \Sigma_\Omega, \mathbb{P})$, ο μετρήσιμος χώρος $(\mathbb{R}, \Sigma_\mathbb{R})$ και η τυχαία μεταβλητή X. Το ζεύγος $\mathbb{P}, X$ προσδιορίζει μονοσήμαντα κατανομή στο $\mathbb{R}$, έστω $\mathbb{P}^*$ που ορίζεται ως εξής:

Αν $A \in \Sigma_\mathbb{R}$ τότε $\mathbb{P}^*(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$

Παρατηρήσεις

1. Η $\mathbb{P}^*$ είναι καλώς ορισμένη κατανομή στο $\mathbb{R}$ εξαιτίας του ότι η $\mathbb{P}$ είναι καλώς ορισμένη κατανομή στο Ω. Ονομάζεται κατανομή από μεταφορά της $\mathbb{P}$ στο $\mathbb{R}$ μέσω της X.

2. Συνήθως, η $\mathbb{P}^*$ ονομάζεται ως η κατανομή που ακολουθεί η τυχαία μεταβλητή X ($X \sim \mathbb{P}^*$), αγνοώντας την υφιστάμενη $\mathbb{P}$.

3. Εφόσον μπορούμε να μεταφέρουμε κατανομές στους πραγματικούς μέσω τυχαίων μεταβλητών, μπορούμε καταρχάς να μελετάμε κατανομές πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ όπου υπάρχει πλούσια μαθηματική δομή.

Παράδειγμα

Να βρεθεί η $\mathbb{P}^*$ όταν: $\Omega = \{K, \Gamma\}$, $\mathbb{P}(\{K\}) = \frac{1}{3}$

$X(K) = 3$, $X(\Gamma) = 4$

Βήμα 1: Βρίσκουμε Σ_Ω, $\mathbb{P}(\{\Gamma\})$

$\Sigma_\Omega = \{\emptyset, \Omega, \{K\}, \{\Gamma\}\}$ το δυναμοσύνολο του Ω

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\{K,\Gamma\}) = \mathbb{P}(\{K\} \cup \{\Gamma\}) \overset{\text{ιδιότητα προσθετικότητας}}{=} \mathbb{P}(\{K\}) + \mathbb{P}(\{\Gamma\}) \iff$$ (ιδιότητα τυποποίησης)

$$\iff 1 = \mathbb{P}(\{\Gamma\}) + \frac{1}{3} \Rightarrow \mathbb{P}(\{\Gamma\}) = \frac{2}{3}$$

Βήμα 2: Υπολογίζουμε τις αντίστροφες εικόνες

$$X^{-1}(A) = \begin{cases} \emptyset \in \Sigma_\Omega &, \text{αν } 3,4 \notin A \\ \{K\} \in \Sigma_\Omega &, \text{αν } 3 \in A, 4 \notin A \\ \{\Gamma\} \in \Sigma_\Omega &, \text{αν } 3 \notin A, 4 \in A \\ \Omega &, \text{αν } 3,4 \in A \end{cases}$$

Βήμα 3: Υπολογίζουμε την $\mathbb{P}^*(A)$

όπου $\mathbb{P}^*(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$, $\forall A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$

$$\mathbb{P}^*(A) = \begin{cases} \mathbb{P}(\emptyset) = 0 &, \text{αν } 3,4 \notin A \\ \mathbb{P}(\{K\}) = \frac{1}{3} &, \text{αν } 3 \in A, 4 \notin A \\ \mathbb{P}(\{\Gamma\}) = \frac{2}{3} &, \text{αν } 3 \notin A, 4 \in A \\ \mathbb{P}(\Omega) = 1 &, \text{αν } 3,4 \in A \end{cases}$$

▶ Στήριγμα Κατανομής

Έστω κατανομή πιθανότητας $\mathbb{P}$ στο $\mathbb{R}$. Το στήριγμα (supp) αυτής είναι το μικρότερο κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο η $\mathbb{P}$ αποδίδει μοναδιαία πιθανότητα.

Το στήριγμα διευκολύνει τη διαδικασία περιγραφής μιας κατανομής πιθανότητας στον $\mathbb{R}$, αφού $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap supp)$.

Πόρισμα:
Αν $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ τότε $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap supp)$.
Απόδειξη (→ διαλέξεις)

⊛ Ανάλογα με τη μορφή που μπορεί να πάρει το στήριγμα μας παρέχει την παρακάτω κατηγοριοποίηση των κατανομών στο $\mathbb{R}$.

α. Η κατανομή $\mathbb{P}$ ονομάζεται διακριτή αν το στήριγμά της είναι διακριτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ (π.χ. πεπερασμένο, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$)

β. Η κατανομή $\mathbb{P}$ θα ονομάζεται συνεχής αν το στήριγμά της είναι διάστημα.

γ. Η κατανομή $\mathbb{P}$ θα ονομάζεται μικτή αν το στήριγμα της έχει και διακριτό μέρος και διάστημα.

Σχετικά με τις διακριτές κατανομές, ισχυριζόμαστε ότι μπορούμε να τις περιγράψουμε "εύκολα" (χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό) ακριβώς επειδή έχουν διακριτό στήριγμα της μορφής $supp = \{x_1, x_2, \dots x_n, \dots\}$

ερ: Είναι δυνατόν μια κατανομή να αποδίδει μηδενική πιθανότητα σε κάποιο σημείο του στηρίγματός της?
Κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό διότι αυτό το $x_i \in supp$, $\mathbb{P}(x_i) = 0$.
Σ'αυτή την περίπτωση θα μπορούσαμε να το αφαιρέσαμε απ'το supp.

Συνεπώς, το supp δεν θα ήταν το μικρότερο, κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\mathbb{P}(supp)=1$

Πόρισμα

Μία διακριτή κατανομή αποδίδει αυστηρά θετική πιθανότητα σε κάθε στοιχείο του στηρίγματός της, $supp = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Για να περιγράψουμε μία διακριτή κατανομή πιθανότητας στο $\mathbb{R}$, θα πρέπει

1. να ορίσουμε το στήριγμά της
2. να ορίσουμε τι πιθανότητα αποδίδει η κάθε κατανομή σε κάθε στοιχείο του στηρίγματος

Συνεπώς, αν γνωρίζουμε τα παραπάνω μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα που αποδίδει η εκάστοτε κατανομή σε κάθε ενδεχόμενο A της συλλογής μετρήσιμων υποσυνόλων Σ_{Ω} του Ω.

Αντίστροφα, αν γνωρίζουμε τα 1 και 2 τότε για να επιβεβαιώσουμε ότι η κατανομή είναι διακριτή και καλώς ορισμένη θα πρέπει:

1. Το στήριγμά της να είναι διακριτό
2. $\forall x_i \in supp$ θα πρέπει να ισχύει $\mathbb{P}(\{x_i\}) > 0$
3. $\mathbb{P}(supp) = 1$

Άσκηση

Έστω χώρος πιθανότητας $(\Omega, \Sigma_{\Omega}, \mathbb{P})$, μετρήσιμος χώρος $(\mathbb{R}, \Sigma_{\mathbb{R}})$ και τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \to \mathbb{R}$ όπου:

$$\Omega = \{a, b, c\}, \quad \mathbb{P}(\{a\}) = p, \quad \mathbb{P}(\{b\}) = q \quad \text{όπου } p, q \in \left(0, \tfrac{1}{2}\right)$$

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \omega = a \\ 2, & \text{αν } \omega = b \\ 3, & \text{αν } \omega = c \end{cases}$$

1. Βρείτε το Σ_Ω

2. Αν τα a, b, c είναι ξένα μεταξύ τους, βρείτε το $\mathbb{P}(\{c\})$ έτσι ώστε η $\mathbb{P}$ να είναι μέτρο πιθανότητας.

3. Δείξτε ότι η X είναι τυχαία μεταβλητή.

4. Βρείτε την $\mathbb{P}^*$ που προκύπτει από μεταφορά της $\mathbb{P}$ μέσω της X.

5. Βρείτε το στήριγμα της $\mathbb{P}^*$. Τι συμπέρασμα βγάζετε?

<u>Λύση Άσκησης</u>

1. Αφού το Ω είναι πεπερασμένο τότε κάθε υποσύνολό του θα είναι μετρήσιμο, άρα και το δυναμοσύνολό του είναι:

$$\Sigma_\Omega = 2^\Omega = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \Omega\}$$

2. Απ' τον ορισμό της συνάρτησης πιθανότητας, για να είναι η $\mathbb{P}$ συνάρτηση πιθανότητας θα πρέπει να ισχύει $\mathbb{P}(\Omega)=1$. Επίσης, θα πρέπει να ισχύει ότι οι πιθανότητες είναι μη-αρνητικές καθώς και η ιδιότητα της προσθετικότητας.

Έχουμε $\Omega = \{a,b,c\} = \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}$

Επειδή τα μονοσύνολα-στοιχειώδη σύνολα είναι ξένα μεταξύ τους ή ακριβώς μονοσήμαντα έχουμε:

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\{a\}) + \mathbb{P}(\{b\}) + \mathbb{P}(\{c\}) \Rightarrow \text{(κά την ιδιότητα της ενοποίησης)}$$

$$1 = p + q + \mathbb{P}(\{c\}) \Rightarrow \mathbb{P}(\{c\}) = 1-p-q$$

3. Σύμφωνα με τον ορισμό η $X : \Omega \to \mathbb{R}$ θα είναι τυχαία μεταβλητή ανν $\forall A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$, $X^{-1}(A) \in \Sigma_{\Omega}$.

Επομένως, για $\forall A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ έχουμε:

$$X^{-1}(A) = \{\omega : X(\omega) \in A\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{αν } 1,2,3 \notin A \\ \Omega, & \text{αν } 1,2,3 \in A \\ \{a\}, & \text{αν } 1 \in A,\ 2,3 \notin A \\ \{b\}, & \text{αν } 2 \in A,\ 1,3 \notin A \\ \{c\}, & \text{αν } 3 \in A,\ 1,2, \notin A \\ \{\alpha, b\}, & \text{αν } 1,2 \in A,\ 3 \notin A \\ \{\alpha, c\}, & \text{αν } 1,3 \in A,\ 2 \notin A \\ \{b, c\}, & \text{αν } 2,3 \in A,\ 1 \notin A \end{cases}$$

4. Η συνάρτηση από μεταφορά P^* ορίζεται ως:

$$\mathbb{P}^*(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)), \quad \forall A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$$

Επομένως

$$\mathbb{P}^*(A) = \begin{cases} \mathbb{P}(\emptyset) = 0, & 1,2,3 \notin A \\ \mathbb{P}(\Omega) = 1, & 1,2,3 \in A \\ \mathbb{P}(\{\alpha\}) = p, & 1 \in A,\ 2,3 \notin A \\ \mathbb{P}(\{b\}) = q, & 2 \in A,\ 1,3 \notin A \\ \mathbb{P}(\{\alpha, b\}) = p+q, & 1,2 \in A,\ 3 \notin A \\ \mathbb{P}(\{c\}) = 1-p-q, & 3 \in A,\ 1,2 \notin A \\ \mathbb{P}(\{\alpha, c\}) = 1-q, & 1,3 \in A,\ 2 \notin A \\ \mathbb{P}(\{b, c\}) = 1-p, & 2,3 \in A,\ 1 \notin A \end{cases}$$

5. Από το προηγούμενο ερώτημα, σε $\forall A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ για το οποίο ισχύει $A \cap 1,2,3$ αποδίδεται μοναδιαία πιθανότητα.
Το στήριγμα της $\mathbb{P}^*$ είναι το μικρότερο κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο η $\mathbb{P}^*$ αποδίδει μοναδιαία πιθανότητα. Επομένως, όπως βλέπουμε παραπάνω, το μικρότερο τέτοιο σύνολο είναι το $\{1,2,3\}$ το οποίο είναι κλειστό. Άρα, $\operatorname{supp} \mathbb{P}^* = \{1,2,3\}$

Άσκηση

Έστω χώρος πιθανότητας $(\Omega, \Sigma_\Omega, \mathbb{P})$, μετρήσιμος χώρος $(\mathbb{R}, \Sigma_{\mathbb{R}})$ και συνάρτηση $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ όπου

$$Y(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \omega = \alpha \\ 2, & \text{αν } \omega = b \\ 2, & \text{αν } \omega = c \end{cases}$$

Απαντήστε στα ερωτήματα 1, 3, 4, 5 της προηγούμενης άσκησης.