Ερμηνεία των Διακριτών Κατανομών που εξετάσαμε.

Συμπλήρωμα στα παραδείγματα των διακριτών κατανομών: Ερμηνεία μέσω πειραμάτων τύχης, τυχαίων μεταβλητών κ' ορίων.

Στα παρακάτω θα δοθεί ερμηνεία των παραδειγμάτων διακριτών κατανομών μέσω πειραμάτων τύχης, εμφύτευσης των στοιχειωδών ενδεχομένων τους στο $\mathbb{R}$ μέσω τυχαίων μεταβλητών κ' ορίων ως προς το πλήθος των πειραμάτων.

1. Εκφυλισμένη κατανομή στο 0

Έστω πείραμα τύχης με μοναδικό (κ' συνεπώς βέβαιο) ενδεχόμενο α. Το σύνολο των στοιχειωδών ενδεχομένων είναι το $\Omega=\{\alpha\}$, η συλλογή των σύνθετων ενδεχομένων, $\Sigma_\Omega = \{\emptyset, \Omega\} = \{\emptyset, \{\alpha\}\}$ κ' η μοναδική (γιατί;) κατανομή που μπορεί να ορίζεται στο Σ_Ω είναι αυτή που αποδίδει $\mathbb{P}(\emptyset)=0$, $\mathbb{P}(\Omega)=\mathbb{P}(\{\alpha\})=1$.

Έστω τυχαία μεταβλητή $X:\Omega\to\mathbb{R}$ που ορίζεται ως

$X(\alpha)=0$. (γιατί είναι καλώς ορισμένη). Τότε η X μεταφέρει την $\mathbb{P}$ στο $\mathbb{R}$ αποκτώντας την κατανομή στους πραγματικούς που ορίζεται ως, $A\in\Sigma_{\mathbb{R}}$, $\mathbb{P}(A)=\begin{cases}0, & 0\notin A\\ 1, & 1\in A\end{cases}$. (δείξτε το!) Αυτή όμως είναι η εκφυλισμένη στο 0 (γιατί;).

Οπότε η συγκεκριμένη κατανομή προκύπτει από την παραπάνω "μεταφύτευση" του στοιχειώδους ενδεχομένου του παραπάνω πειράματος στο $\mathbb{R}$ (αντιστοίχιση του α στο 0 μέσω της X).

Άσκηση: Αν είχαμε χρησιμοποιήσει την τυχαία μεταβλητή $Y:\Omega\to\mathbb{R}$, $Y(\alpha)=1$ ποια κατανομή θα είχε προκύψει στο $\mathbb{R}$; Γενικεύστε.

2. Bernoulli με παράμετρο $q\in(0,1)$ [$Ber(q)$]

Έστω τυχαίο πείραμα με δύο στοιχειώδη ενδεχόμενα α, β.
Αντίστοιχα με τα παραπάνω έχουμε $\Omega=\{\alpha,\beta\}$, $\Sigma_\Omega=\{\emptyset,\{\alpha\},\{\beta\},\Omega\}$
Για $q\in(0,1)$, έστω η κατανομή επί του Ω που ορίζεται από:
$\mathbb{P}(\emptyset)=0$, $\mathbb{P}(\{\alpha\})=q$, $\mathbb{P}(\{\beta\})=1-q$, $\mathbb{P}(\Omega)=1$ (την έχουμε ξαναδεί - γιατί είναι καλώς ορισμένη;) Έστω η τυχαία μεταβλητή $X:\Omega\to\mathbb{R}$ που ορίζεται ως $X(\alpha)=1$, $X(\beta)=0$ (γιατί είναι καλώς ορισμένη;)

Η συνάρτηση X μεταφέρει την $\mathbb{P}$ στους πραγματικούς αριθμούς, αποκτώντας την κατανομή επί του $\mathbb{R}$ που ορίζεται ως: $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$,

$$\mathbb{P}(A) = \begin{cases} 0, & 0,1 \notin A \\ 1-q, & 0 \in A, 1 \notin A \\ q, & 0 \notin A, 1 \in A \\ 1, & 0,1 \in A \end{cases}$$

(Δείξτε το!)

Αυτή όμως είναι η $Ber(q)$ (γιατί;)

3. Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n \in \mathbb{N}^*$, $q \in (0,1)$ $[Bin(n,q)]$

Έστω ότι το τυχαίο πείραμα στο 2 επαναλαμβάνεται n φορές με "ανεξάρτητο τρόπο" (δηλ. το αποτέλεσμα οποιουδήποτε πειράματος δεν επηρεάζει την έκβαση οποιουδήποτε άλλου). Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ οι τυχαίες μεταβλητές που λειτουργούν σε καθένα από τα πειράματα όπως η X στο 2 (δηλ. $\forall i=1,\dots,n$, $X_i(\alpha)=1$, $X_i(\beta)=0$).

Έστω η τυχαία μεταβλητή $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i = X_1+X_2+\dots+X_n$.

Επειδή $\forall i=1,\dots,n$ η X_i μπορεί να λάβει μόνο τις τιμές 0 ή 1, η Y μπορεί να λάβει τις τιμές $0,1,2,\dots,n$ (γιατί;). Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι $\mathbb{P}(Y=i) = \binom{n}{i} q^i (1-q)^{n-i}$ $\forall i=0,\dots,n$.

(Προσπαθήστε το! Χρησιμοποιήστε την κατανομή στο 2 κ' την ανεξαρτησία)

Μα η παραπάνω πιθανότητα είναι αυτή που αποδίδει η $Bin(n,q)$ στο {i}. Επομένως η $Bin(n,q)$ προκύπτει από την $Ber(q)$

μέσω της ανεξάρτητης επανάληψης n φορές του αντίστοιχου τυχαίου πειράματος κ' της παραπάνω άθροισης.

4. Poisson με παράμετρο $\lambda>0$ [Poiss(λ)]

Έστω ότι στο 3 αφήνουμε το πλήθος των (ανεξάρτητων μεταξύ τους) πειραμάτων να τείνει στο $+\infty$ $(n\to+\infty)$, αλλά για κάθε n, επιβάλλουμε στην $Bin(n,q)$ που προκύπτει, το q να εξαρτάται από το n με τρόπο τέτοιο ώστε: καθώς το $n\to+\infty$, $q\to0$ κ' $nq\to\lambda>0$

(π.χ. έστω ότι για αρκετά μεγάλο n, $q:=\lambda/n$).

[Κάτι τέτοιο θα ήταν εφικτό αν επιβάλλαμε στην $Ber(q)$ που περιγράφει το n-οστό πείραμα, το q να εξαρτάται από το n με τον τρόπο που περιγράψαμε παραπάνω, $\forall n=1,2,\dots$]

Πώς μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το $\lim_{n\to+\infty} Bin(n,q)$;

Θυμόμαστε ότι για την $Bin(n,q)$, $supp=\{0,1,\dots,n\}$ επομένως είναι διαισθητικά εμφανές ότι όταν $n\to+\infty$, αν το όριο είναι καλώς ορισμένο θα έχει $supp=\mathbb{N}$.

Επίσης για $i\le n$ ← σταθερό, για την $Bin(n,q)$, $\mathbb{P}(\{i\})=\binom{n}{i}q^i(1-q)^{n-i}$

$$=\frac{n!}{i!\,(n-i)!}q^i(1-q)^{n-i}=\frac{(n-i)!\,(n-i+1)\cdot(n-i+2)\cdot\ldots\cdot n}{i!\,(n-i)!}\,\frac{(nq)^i}{n^i}(1-q)^{-i}\left(1-\frac{nq}{n}\right)^n$$

$$= \frac{(n-i+1)\cdot(n-i+2)\cdots n}{n^i}\,\frac{1}{i!}\,(nq)^i\,(1-q)^{-i}\left(1-\frac{nq}{n}\right)^n$$

Παρατηρούμε ότι καθώς το $n\to+\infty$ $\overbrace{(n-i+1)(n-i+2)\cdots n}^{i\text{ όροι},\ i\text{ σταθερό}}$ συμπεριφέρεται όπως n^i επομένως $\dfrac{(n-i+1)(n-i+2)\cdots n}{n^i}\to 1$.

Επίσης $(nq)^i \to \lambda^i$ αφού το $nq\to\lambda$,

$(1-q)^{-i}\to 1^{-i}=1$ αφού $q\to 0$, $\quad$ (i σταθερό)

$\left(1-\overset{\to\lambda}{nq}/n\right)^n \longrightarrow \exp(-\lambda)$ από τον ορισμό του e.

Τα παραπάνω μας λένε ότι για κάθε $\underset{\text{σταθερό}}{i}\in\mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\{i\}) = \lim_{n\to+\infty}\binom{n}{i}q^i(1-q)^{n-i} = e^{-\lambda}\lambda^i/i!$$

Επομένως έχουμε αποκτήσει κατανομή (εφόσον είναι καλώς ορισμένη) με $supp=\mathbb{N}$, κ' $\mathbb{P}(\{i\})=e^{-\lambda}\lambda^i/i!$, $i\in\mathbb{N}$.

Αυτή όμως είναι η Poiss(λ).

Επομένως η Poiss(λ) προκύπτει ως όριο της Bin(n,q) καθώς $n\to+\infty$, $q\to 0$, $n.q\to\lambda$.

Το παραπάνω ονομάζεται Οριακό Θεώρημα Poisson.

[Poisson Limit Theorem]