Παραδείγματα Κατανομών Πιθανότητας

Τα παρακάτω είναι παραδείγματα κατανομών πιθανότητας που επί το πλείστον είναι δυνατόν να περιγραφούν απαριθμώντας το πως αυτές συμπεριφέρονται σε κάθε στοιχείο του εκάστοτε Σ_Ω.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.

Έστω ότι $\Omega=\{x\}$ και $\Sigma_\Omega=\{\emptyset,\Omega\}$. Παρατηρούμε ότι εδώ οι μόνες μη τετριμμένες ξένες ενώσεις από στοιχεία του Σ_Ω είναι οι i. $\Omega\cup\emptyset=\Omega$ (αφού $\Omega\cap\emptyset=\emptyset$) και ii. $\emptyset\cup\emptyset=\emptyset$ (αφού $\emptyset\cap\emptyset=\emptyset$).

1. Έστω η συνολοσυνάρτηση $P:\Sigma_\Omega\to\mathbb{R}$ που ορίζεται από:

$$P(\Omega)=1,\ P(\emptyset)=0.$$

Η P είναι κατανομή πιθανότητας αφού $P(A)\geq 0$, $A=\emptyset,\Omega$, $P(\Omega)=1$ και εξαιτίας των i, και ii,

$$\begin{array}{ccccc} 1 & = & P(\Omega) & = & P(\Omega\cup\emptyset) \\ \| & & & & \| \\ 1 & = & 1+0 & = & P(\Omega)+P(\emptyset) \end{array}$$

ενώ

$$\begin{array}{ccccc} 0 & = & P(\emptyset) & = & P(\emptyset\cup\emptyset) \\ \| & & & & \| \\ 0 & = & 0+0 & = & P(\emptyset)+P(\emptyset) \end{array}$$

, οπότε η P ικανοποιεί και τις τρείς ορισμένες ιδιότητες μιας κατανομής πιθανότητας.

Παρατηρήσεις:

α. Αν Q άλλη κατανομή πιθανότητας στο συγκεκριμένο Ω αναγκαστικά (γιατί;) θα ικανοποιεί ότι $Q(\Omega)=1$ και $Q(\emptyset)=0$, οπότε (γιατί;) $P=Q$. Συνεπώς η P είναι η μοναδική κατανομή πιθανότητας που μπορεί να οριστεί σε αυτό το Ω. Αυτό σημαίνει ότι αν $Q^*:\Sigma_\Omega\to\mathbb{R}$ είναι ανάλογη συνολοσυνάρτηση με $Q^*\neq P$ τότε η Q^* δεν μπορεί να είναι κατανομή πιθανότητας αφού δεν θα ικανοποιεί τουλάχιστον μία από τις τρεις ιδιότητες. Π.χ. 2. έστω η $Q^*:\Sigma_\Omega\to\mathbb{R}$ με $Q^*(\Omega)=1$, $Q^*(\emptyset)=1/2$. Προφανώς η Q^* ικανοποιεί τις δύο πρώτες ιδιότητες (γιατί;), αλλά δεν ικανοποιεί την ιδιότητα της προσθετικότητας, αφού για την i. έχουμε

$$\begin{array}{ccccc} 1 & = & Q^*(\Omega) & = & Q^*(\Omega\cup\emptyset) \\ \neq & & & & \neq \\ 3/2 & = & 1+1/2 & = & Q^*(\Omega)+Q^*(\emptyset) \end{array}$$

και για την ii έχουμε

$$\begin{array}{ccccc} 1/2 & = & Q^*(\emptyset) & = & Q^*(\emptyset\cup\emptyset) \\ \neq & & & & \\ 1 & = & 1/2+1/2 & = & Q^*(\emptyset)+Q^*(\emptyset). \end{array}$$

Άσκηση. Να βρεθούν παραδείγματα συναρτήσεων $\Sigma_\Omega \to \mathbb{R}$ που δεν ικανοποιούν κάποιον από όλους τους δυνατούς συνδυασμούς από τις τρεις ιδιότητες.

β. Το Ω είναι το μοναδικό σύνολο πλήρους πιθανότητας (ως προς την P) και αντιστοίχως το $\emptyset$ το μοναδικό αμελητέο σύνολο (ως προς την P).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Β

Έστω ότι $\Omega = \{\alpha, \beta\}$ και $\Sigma_\Omega = \{\emptyset, \Omega, \{\alpha\}, \{\beta\}\}$. Παρατηρούμε ότι ως προς τις δυνατές μη τετριμμένες ξένες ενώσεις ισχύουν και εδώ οι περιπτώσεις i και ii από προηγουμένως, αλλά ισχύει και η iii $\Omega = \{\alpha\}\cup\{\beta\}$ (αφού $\{\alpha\}\cap\{\beta\}=\emptyset$).

α. Έστω $q\in[0,1]$ και η συνολοσυνάρτηση $P_q : \Sigma_\Omega \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από:

$P_q(\Omega)=1$, $P_q(\emptyset)=0$, $P_q(\{\alpha\})=q$, $P_q(\{\beta\})=1-q$.

Η P_q είναι κατανομή πιθανότητας αφού προφανώς ικανοποιεί (γιατί;) τις δύο πρώτες ιδιότητες, ενώ η προσθετικότητα ισχύει όπως και παραπάνω για τις περιπτώσεις i, ii, ενώ για την iii έχουμε

$$\begin{array}{ccccc} 1 & = & P(\Omega) & = & P(\{\alpha\}\cup\{\beta\}) \\ \| & & & & \| \\ 1 & = & q+1-q & = & P(\{\alpha\})+P(\{\beta\}). \end{array}$$

Παρατηρήσεις:

α. Από το παραπάνω προκύπτει ότι $\forall q\in[0,1]$ η εκάστοτε P_q είναι καλώς ορισμένη κατανομή πιθανότητας. Επίσης αν $q, q^*\in[0,1]$ με $q\neq q^*$ τότε $P_q \neq P_{q^*}$ αφού π.χ. $P_q(\{\alpha\}) = q \neq q^* = P_{q^*}(\{\alpha\})$. Έτσι σε κάθε τιμή του q αντιστοιχίζεται μοναδική κατανομή πιθανότητας. Επιπλέον όποια κατανομή πιθανότητας στο συγκεκριμένο Ω αναγκαστικά θα αποδίδει $P(\{\beta\}) = 1-P(\{\alpha\})$ (γιατί;), επομένως η P θα έχει την μορφή P_q για κάποιο $q\in[0,1]$. Τα παραπάνω μας λένε ότι το σύνολο όλων των κατανομών που μπορούν να ορισθούν στο δειγματοχώρο Ω είναι το $\{P_q,\ q\in[0,1]\}$ το οποίο έχει πλήθος στοιχείων ίσο με το πλήθος των στοιχείων του $[0,1]$ (συγκρίνετέ το με το πλήθος των δυνατών κατανομών στο προηγούμενο παράδειγμα) και αυτό επισημαίνεται αμφιμονοσήμαντα από την Ευκλείδεια παράμετρο q (το οποίο έχει μεγάλη σημασία σε περιπτώσεις σχετικές στατιστικής επαγωγής).

b. Τα P_q-υποσύνολα πλήρους πιθανότητας είναι τα

$$\begin{cases} \Omega, & q\in(0,1) \\ \Omega, \{a\}, & q=1 \\ \Omega, \{b\}, & q=0 \end{cases}$$

ενώ αντιστοίχως τα P_q-αμελητέα σύνολα είναι τα

$$\begin{cases} \emptyset, & q\in(0,1) \\ \emptyset, \{b\}, & q=1 \\ \emptyset, \{a\}, & q=0 \end{cases}.$$

Άσκηση. Να βρεθούν παραδείγματα συνολοσυναρτήσεων $\Sigma_\Omega\to\mathbb{R}$ που δεν ικανοποιούν κάποια από κάθε μία τις τρεις οριστικές ιδιότητες και συνεπώς δεν αποτελούν κατανομές πιθανότητας επί του Ω.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Γ.

Έστω ότι $\Omega=\mathbb{R}$. Αφού το Σ_Ω είναι δυνατόν να επιλεγεί ώστε να μην μπορούν να απαριθμηθούν όπως παραπάνω τα στοιχεία του είναι δύσκολο να χρησιμοποιηθεί ο ορισμός προηγουμένως για την περιγραφή κατανομών πιθανότητας γενικά. Μας χρειάζονται κάποιες ισοδυναμίες του ορισμού που θα είναι περισσότερο "εύχρηστες" και με τις οποίες θα ασχοληθούμε σε μεγάλο μέρος του μαθήματος.