Κατανομές Πιθανότητας: Ορισμός και Ιδιότητες

Τα παρακάτω βρίσκονται σε στάδιο διαρκούς διόρθωσης και δεν υποκαθιστούν τις διαλέξεις. Παρακαλώ αναφέρετε όποια παραδρομή στο stelios@aueb.gr ή στο e-class του μαθήματος.

Στέλιος Αρβανίτης

Αφού θυμηθήκαμε βασικές έννοιες από την συνολοθεωρία εξετάζουμε την έννοια της κατανομής (ή μέτρου) πιθανότητας. Η κατασκευή αυτή εμπλέκει την έννοια του καταλόγου από σύνολα στα οποία μπορούν να αποδωθούν με συνεπή τρόπο πιθανότητες οπότε αρχικά αναγκαστήκαμε να ασχοληθούμε με την έννοια του μετρήσιμου χώρου.

Ετσι, δεδομένου συνόλου αναφοράς $\Omega \neq \emptyset$ θεωρήσαμε συλλογή (έστω Σ_Ω) που αποτελείται από τα μετρήσιμα υποσύνολα του Ω, δηλαδή τα υποσύνολα του στα οποία μπορεί να αποδοθεί κάποια έννοια μεγέθους. Η συλλογή αυτή αναγκαστικά περιέχει τα Ω και $\emptyset$, ενώ είναι κλειστή ως προς ενώσεις, τομές, συμπληρώματα, διαφορές κ.ο.κ., εφόσον αυτές δεν έχουν "μεγάλο πλήθος". Οταν το Ω είναι απειροσύνολο είναι δυνατόν να υπάρχουν κομμάτια του στα οποία είναι "μη δυνατή" η απόδοση μεγέθους. Κάτι τέτοιο συμβαίνει για παράδειγμα στην περίπτωση που $\Omega = \mathbb{R}$. Παρόλα αυτά, στο συγκεκριμένο παράδειγμα η εν λόγω συλλογή θα αποτελείται από τα "οικεία" υποσύνολα των πραγματικών (ανοικτά και κλειστά διαστήματα, μονοσύνολα κ.ο.κ.).

Ορισμος. Η δυάδα (Ω, Σ_Ω) ονομάζεται μετρήσιμος χώρος.$\square$

Η παραπάνω έννοια κωδικοποιεί την πληροφορία που περιλαμβάνει το σύνολο αναφοράς, μαζί με τα "κομμάτια" του στα οποία μπορούν να αποδοθούν πιθανότητες. *Δεδομένου* του παραπάνω, μια κατανομή πιθανότητας θα είναι ένας μηχανισμός ο οποίος αποδίδει πιθανότητες στα παραπάνω κομμάτια και ικανοποιεί "εύλογους" περιορισμούς. Πιο συγκεκριμένα:

Ορισμος. Κατανομή ή μέτρο πιθανότητας επί του Ω είναι όποια συνάρτηση $\mathbb{P} : \Sigma_\Omega \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $\mathbb{P}(A) \geq 0,\ \forall A \in \Sigma_\Omega$ (θετικά (ήμι-) ορισμένη),
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (πεπερασμένη και τυποποιημένη), και,
3. αν τα $A_1, A_2, \ldots \in \Sigma_\Omega$ και είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους τότε $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \ldots$ (αριθμήσιμη ή "μικρού πλήθους" προσθετικότητα).$\square$

Καταρχάς σημειώνουμε ότι η ορολογία μπορεί να είναι παραπλανητική. Παρόλο που αναφερόμαστε σε κατανομή επί του Ω, δεν είναι το Ω το πεδίο ορισμού της αλλά το Σ_Ω. Δηλαδή η P είναι συνολοσυνάρτηση και αυτό συνδέεται με την ενδοχόμενη δυσκολία περιγραφής της μέσω του ορισμού όταν το Σ_Ω είναι ”περίπλοκο”. Οι δύο πρώτες ιδιότητες που πρέπει να ικανοποιεί είναι άμεσα κατανοητές. Η τελευταία ιδιότητα είναι γενίκευση της σχετικής μας διαίσθησης για τις διαδικασίες μέτρησης καθώς δυνατόν να εμπλέκει κατάλληλα άπειρο αριθμό προσθετέων (για να το κατανοήσουμε χρειαζόμαστε και την έννοια της σειράς) και ονομάζεται *αριθμήσιμη ή ”μικρού πλήθους” προσθετικότητα* (countable additivity). Αυτό διαμορφώνει μια έννοια συνέχειας για την κατανομή η οποία είναι όμως μακριά από τα ενδιαφέροντα μας στο παρόν μάθημα.

Ορισμος. Η τριάδα $(\Omega, \Sigma_\Omega, \mathbb{P})$ ονομάζεται χώρος πιθανότητας.□

Η παραπάνω έννοια κωδικοποιεί την πληροφορία που περιλαμβάνει το σύνολο αναφοράς, μαζί με τα ”κομμάτια” του στα οποία μπορούν να αποδοθούν πιθανότητες, καθώς και της πιθανότητας που αποδίδεται σε κάθε ένα από αυτά από την συγκεκριμένη κατανομή.

Ο ορισμός της κατανομής είναι ο οικονομικότερος δυνατός καθώς από αυτόν προκύπτουν άμεσα ιδιότητες της P κάποιες από τις οποίες εξάγουμε παρακάτω. Αυτές μπορούμε να τις συλλάβουμε τόσο μέσω τις διαίσθησης μας για τις διαδικασίες μέτρησης αλλά και ως αλγεβρικούς μετασχηματισμούς, καθώς κάποιες από αυτές είναι δυνατόν να ερμηνευθούν ως ικανές συνθήκες υπό τις οποίες η P μετασχηματίζει συνολοθεωρητικές πράξεις σε ”αντίστοιχες” πράξεις μεταξύ πραγματικών αριθμών.

Πορισμα 1. Για κάθε $A, B \in \Sigma_\Omega$, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B') = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A - B)$.

Αποδειξη. Αφού το $A, B \in \Sigma_\Omega$, τότε και τα $B', A \cap B, A \cap B' \in \Sigma_\Omega$ (το Σ_Ω είναι κλειστό ως προς τις συνολοθεωρητικές πράξεις εφόσον αφορούν ”μεγάλο” πλήθος μετρήσιμων υποσυνόλων) και έχουμε ότι $A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$, ενώ $(A \cap B) \cap (A \cap B') = \emptyset$. Επομένως εξαιτίας της προσθετικότητας, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap B')) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B')$. Η δεύτερη ισότητα προκύπτει από το ότι $A \cap B' = A - B$ (γιατί;).□

Πορισμα 2. Για κάθε $A \in \Sigma_\Omega$, $\mathbb{P}(A') = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Αποδειξη. Αφού το $A \in \Sigma_\Omega$, τότε και το $A' \in \Sigma_\Omega$ και έχουμε ότι $\Omega = A \cup A'$, ενώ $A \cap A' = \emptyset$. Επομένως εξαιτίας της τυποποίησης και της αριθμήσιμης προσθετικότητας αντιστοίχως, $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup A') = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A') \Leftrightarrow \mathbb{P}(A') = 1 - \mathbb{P}(A)$.□

Πορισμα 3. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Αποδειξη. $\emptyset \in \Sigma_\Omega$ και $\emptyset = \Omega'$, οπότε από το Πόρισμα 1 και την τυποποίηση αντίστοιχα, έχουμε $\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\Omega') = 1 - \mathbb{P}(\Omega) = 1 - 1 = 0$.□

Πορισμα 4. [Μονοτονία] Για κάθε $A_1, A_2 \in \Sigma_\Omega$, $A_1 \subseteq A_2 \Longrightarrow \mathbb{P}(A_1) \leq \mathbb{P}(A_2)$.

Αποδειξη. Αφού $A_1, A_2 \in \Sigma_\Omega$, τότε και το $A_1, -A \in \Sigma_\Omega$ (το Σ_Ω είναι κλειστό ως προς τις συνολοθεωρητικές πράξεις εφόσον αφορούν ”μεγάλο” πλήθος μετρήσιμων υποσυνόλων). Επίσης, $A_2 = A_1 \cup (A_2 - A_1)$, $A_1 \cap (A_2 - A_1) = \emptyset$. Επομένως εξαιτίας της αριθμήσιμης προσθετικότητας $\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_1 \cup (A_2 - A_1)) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}((A_2 - A_1))$. Εξαιτίας της θετικότητας $\mathbb{P}((A_2 - A_1)) \geq 0$, άρα $\mathbb{P}(A_2) \geq \mathbb{P}(A_1)$.□

Σημειωση 1. Η μονοτονία δεν είναι γνήσια καθώς είναι δυνατόν να έχουμε ότι $A_1 \subset A_2$ αλλά $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2)$, θα δούμε αργότερα παραδείγματα.

Πορισμα 5. Για κάθε $A \in \Sigma_\Omega$, $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.

Αποδειξη. Αφού $A \in \Sigma_\Omega \Rightarrow \emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$. Επομένως εξαιτίας της μονοτονίας, της τυποποίησης και του Πορίσματος 3 αντίστοιχα θα έχουμε ότι $0 = \mathbb{P}(\emptyset) \leq \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(\Omega) = 1$.□

Σημειωση 2. Αν κάποιο $A \in \Sigma_\Omega$ έχει $\mathbb{P}(A) = 1$ τότε ονομάζεται πλήρους ($\mathbb{P}$-) πιθανότητας ενώ αν έχει $\mathbb{P}(A) = 0$ τότε ονομάζεται ($\mathbb{P}$-) αμελητέο. Προφανώς (γιατί;) το συμπλήρωμα ενός πλήρους πιθανότητας μετρήσιμου υποσυνόλου είναι αμελητέο και αντιστρόφως. Προσοχή, το αν το A έχει τέτοιες ιδιότητες εξαρτάται και από το εκάστοτε $\mathbb{P}$. Μόνο το Ω είναι πλήρους ($\mathbb{P}$-) πιθανότητας για κάθε δυνατό $\mathbb{P}$ επί του Ω, και αντίστοιχα μόνο το $\emptyset$ είναι ($\mathbb{P}$-) αμελητέο για κάθε δυνατό $\mathbb{P}$ επί του Ω. Οι παρακάτω ασκήσεις μας εξηγούν το τι συμβαίνει ως προς αυτές τις ιδιότητες με υποσύνολα αμελητέων και υπερσύνολα συνόλων πλήρους πιθανότητας ως προς την $\mathbb{P}$.

Ασκησεις:

1. Να δείξετε ότι αν $A, B \in \Sigma_\Omega$ με $A \subseteq B$ και $\mathbb{P}(B) = 0$, τότε και $\mathbb{P}(A) = 0$.
2. Να δείξετε ότι αν $A, B \in \Sigma_\Omega$ με $A \subseteq B$ και $\mathbb{P}(A) = 1$, τότε και $\mathbb{P}(B) = 1$.
3. Να δείξετε ότι αν $A, B \in \Sigma_\Omega$ και $\mathbb{P}(A \cap B) = 1$, τότε και $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1$.
4. Να δείξετε ότι αν $A, B \in \Sigma_\Omega$ και $\mathbb{P}(A \cup B) = 0$, τότε και $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 0$.

Πορισμα 6. Για κάθε $A_1, A_2 \in \Sigma_\Omega$, $\mathbb{P}(A_2 - A_1) = \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_1)$.
Αποδειξη. Προκύπτει άμεσα από την δεύτερη ισότητα του Πορίσματος 1.□

Σημειωση 3. Οταν $A_1 \subseteq A_2$ τότε $A_2 \cap A_1 = A_1$ (γιατί;) οπότε και το Πόρισμα 6 μας δίνει ότι $\mathbb{P}(A_2 - A_1) = \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1)$. Επομένως ο εγκλεισμός του A_1 στο A_2 είναι ικανή συνθήκη για τον μετασχηματισμό από την P της συνολοθεωρητικής διαφοράς σε διαφορά μεταξύ πραγματικών αριθμών.

Πορισμα 7. Για κάθε $A_1, A_2 \in \Sigma_\Omega$, $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$.
Αποδειξη. Εχουμε ότι $A_1 \cup A_2 = (A_1 - A_2) \cup (A_1 \cap A_2) \cup (A_2 - A_1)$ και η ένωση στην δεξιά πλευρά της ταυτότητας αποτελείται από ανά δύο ξένα μεταξύ τους σύνολα (γιατί;). Η μετρησιμότητα των παρακάτω προκύπτει όπως και προηγουμένως. Εξαιτίας της προσθετικότητας έχουμε ότι $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1 - A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_2 - A_1)$. Εφαρμόζοντας στις δυο ακραίες πιθανότητες της δεξιάς πλευράς το Πόρισμα 6 έχουμε ότι $\mathbb{P}(A_1 - A_2) = \mathbb{P}(A_1) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$ και $\mathbb{P}(A_2 - A_1) = \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_1)$. Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη και παρατηρώντας ότι $\mathbb{P}(A_2 \cap A_1) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$ (γιατί;) αποκτούμοε το ζητούμενο.□
Ασκηση: Να εξαχθεί η ανάλογη έκφραση για την $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ όταν $A_1, A_2, A_3 \in \Sigma_\Omega$.

Πορισμα 8. Για κάθε $A_1, A_2 \in \Sigma_\Omega$, $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) \leq \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$.
Αποδειξη. Προκύπτει άμεσα από το Πόρισμα 7 και το ότι $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \geq 0$ εξαιτίας του θετικά ορισμένου της $\mathbb{P}$.

Σημειωση 3. Η παραπάνω ανισότητα θα ισχύει ως ισότητα ανν (αν και μόνο αν) το $A_1 \cap A_2$ είναι ($\mathbb{P}$-) αμελητέο. Αυτό προφανώς περιλαμβάνει την περίπτωση που

$A_1 \cap A_2 = \emptyset$ οπότε και η ισότητα θα λαμβάνεται απευθείας από την προσθετικότητα. Συνεπώς αυτή είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη προκειμένου η κατανομή να μετατρέπει την συνολοθεωρητική ένωση μεταξύ ζεύγους συνόλων σε πρόσθεση μεταξύ πραγματικών. Το Πόρισμα 8 γενικεύεται ακόμη και για ”μικρό” πλήθος από τέτοια σύνολα. Ετσι προκύπτει η ιδιότητα της αριθμήσιμης ή ”μικρού πλήθους” ύπο-προσθετικότητας που λέει ότι, για κάθε $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \Sigma_\Omega$,

$$\mathbb{P}\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots\right) \leq \mathbb{P}\left(A_1\right) + \mathbb{P}\left(A_2\right) + \cdots + \mathbb{P}\left(A_n\right) + \ldots .$$

Τέλος και καθώς είναι δυνατόν σε δεδομένο Ω να είναι δυνατόν να ορισθεί πάνω από μία κατανομές πιθανότητας μας ενδιαφέρει το πότε αυτές θα ταυτίζονται. Η έννοια της ισότητας συναρτήσεων μας δίνει απευθείας τον ορισμό.

Ορισμος. Εστω $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$ δύο κατανομές πιθανότητας επί του Ω. Αυτές θα είναι ίσες ανν είναι ίσες ως συναρτήσεις, δηλαδή $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$ ανν $\mathbb{P}(A) = \mathbb{Q}(A)\,,\ \forall A \in \Sigma_\Omega$.

Προφανώς θα πρόκειται για διαφορετικές κατανομές ανν $\mathbb{P}(A) \neq \mathbb{Q}(A)$ έστω και για ένα $A \in \Sigma_\Omega$.