Περαιτέρω Παραδείγματα Υπολογισμού Ροπών

Τα παρακάτω αποτελούν παραδείγματα υπολογισμού ροπών και σχετικών σχολίων για συνεχείς κατανομές.

1. $P = \mathrm{Unif}_{[\alpha,\beta]}$. Ισχύει το σχόλιο 9 των προηγούμενων σημειώσεων (γιατί;). Έχουμε ότι:

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{\alpha} x^k 0\,dx}_{=0\ \text{(γιατί;)}} + \int_{\alpha}^{\beta} x^k \frac{1}{\beta-\alpha}\,dx + \underbrace{\int_{\beta}^{+\infty} x^k 0\,dx}_{=0\ \text{(γιατί;)}}$$

$$= \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} x^k\,dx = \frac{1}{\beta-\alpha}\,\frac{x^{k+1}}{k+1}\Big|_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{k+1}\,\frac{\beta^{k+1}-\alpha^{k+1}}{\beta-\alpha}.$$

Έτσι π.χ. ο μέσος της κατανομής είναι ο ($k=1$), $E(X) =$
$= \frac{1}{2}\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha} = \frac{1}{2}\frac{\beta-\alpha}{\beta-\alpha}(\beta+\alpha) = \frac{\beta+\alpha}{2}$, ενώ επειδή $E(X^2) = \frac{1}{3}\frac{\beta^3-\alpha^3}{\beta-\alpha}$

έχουμε ότι η διακύμανση της κατανομής $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
$= \frac{1}{3}\frac{\beta^3-\alpha^3}{\beta-\alpha} - \frac{1}{4}(\beta+\alpha)^2$. (π.χ. για την τυπική ομοιόμορφη κατανομή,

$\alpha=0, \beta=1$, έχουμε ότι $E(X^k) = \frac{1}{k+1}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}$).

Επιπλέον όταν $\alpha \geq 0$ έχουμε ότι ισχύει το σχόλιο 8 των προηγούμενων σημειώσεων (γιατί;). Όταν $\alpha<0$ κάτι τέτοιο δεν ισχύει όταν το k είναι περιττό. Π.χ. όταν $\alpha<0$, $\beta>0$ τότε για τις απόλυτες ροπές έχουμε:

$$E(|X|^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\alpha} |x|^k 0\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} |x|^k \frac{1}{\beta-\alpha}\,dx +$$

$$\int_{\beta}^{+\infty} |x|^k 0\,dx \underset{\text{(γιατί;)}}{=} \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} |x|^k\,dx = \frac{1}{\beta-\alpha}\left[\int_{\alpha}^{0} (-x)^k\,dx + \int_{0}^{\beta} x^k\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\beta-\alpha}\left[(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}\Big|_{\alpha}^{0} + \frac{x^{k+1}}{k+1}\Big|_{0}^{\beta}\right] = \frac{1}{\beta-\alpha}\left[(-1)^k\frac{(-\alpha^{k+1})}{k+1} + \frac{\beta^{k+1}}{k+1}\right]$$

$= \frac{1}{b-a}\left(b^{k+1} - (-1)^k a^{k+1}\right)$. Όπως αναγένουμε έχουμε ότι όταν k άρτιο

$E(X^k) = E(|X|^k) = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{b-a}$. Προφανώς όταν το k είναι περιττό

κάτι τέτοιο δεν ισχύει γενικά. (Ως άσκηση να βρεθεί το $E(|X|^k)$ και όταν $b \le 0$ και να γίνουν οι ανάλογες συγκρίσεις). □

2. $P = \mathcal{E}xp(\lambda)$, $\lambda > 0$. Ισχύει το σχόλιο 8 των προηγούμενων σημειώσεων (γιατί;). Επομένως έχουμε ότι, όταν $k > 0$:

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x^k 0\,dx + \int_{0}^{+\infty} x^k \lambda e^{-\lambda x} dx \underset{(\text{γιατί;})}{=} -\int_{0}^{+\infty} x^k(-\lambda e^{-\lambda x})dx = -\int_0^{+\infty} x^k (e^{-\lambda x})' dx$$

$$= -\left[\left(x^k e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} k x^{k-1} e^{-\lambda x} dx\right] = -\left(x^k e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}\right) + \frac{k}{\lambda}\int_0^{+\infty} x^{k-1}\lambda e^{-\lambda x} dx \quad (*).$$

Έχουμε ότι $0^k e^{-\lambda 0} = 0$ αφού $k > 0$, ενώ $\lim_{x \to +\infty} x^k e^{-\lambda x} = 0$ (γιατί;).

Επομένως $(*) = \frac{k}{\lambda}\int_0^{+\infty} x^{k-1}\lambda e^{-\lambda x} dx \underset{(\text{γιατί;})}{=} \frac{k}{\lambda}\left[\int_{-\infty}^{0} x^{k-1} 0\,dx + \int_0^{+\infty} x^{k-1}\lambda e^{-\lambda x} dx\right]$

$= \frac{k}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{k-1} f(x)\,dx = \frac{k}{\lambda} E(X^{k-1})$. Επομένως, και επειδή $E(X^0) = 1$

(γιατί;), αν συμβολίσουμε με $y_k := E(X^k)$, αποκτούμε το παρακάτω σύστημα

$$\begin{cases} y_k = \frac{k}{\lambda} y_{k-1}, \; k > 0 & (1) \\ y_0 = 1 & (2) \end{cases}$$

όπου η (1) είναι εξίσωση διαφορών και η (2) είναι αρχική συνθήκη. Το σύστημα αναφέρεται πρόβλημα αρχικών τιμών (ΠΑΤ) και ικανοποιείται από την "ακολουθία" των ροπών της $\mathcal{E}xp(\lambda)$. (Παρατηρούμε ότι φαινομενικά "μη σχετιζόμενα" μαθηματικά αντικείμενα, όπως ΠΑΤ, είναι δυνατόν να "περιγράφουν" ιδιότητες κατανομών πιθανότητας στο $\mathbb{R}$).

Αν το παραπάνω ΠΑΤ έχει μοναδική λύση τότε αυτή θα δίνει τις ροπές της $Exp(\lambda)$. Έτσι έχουμε ότι $\mu_1 = \frac{1}{\lambda}\mu_0 = \frac{1}{\lambda}$, $\mu_2 = \frac{2}{\lambda}\mu_1 = \frac{2\cdot 1}{\lambda^2}$, $\mu_3 = \frac{3}{\lambda}\mu_2 = \frac{3\cdot 2\cdot 1}{\lambda^3}, \dots, \mu_k = \frac{k!}{\lambda^k}$ (αποδείξτε τον γενικό τύπο κάνοντας επαγωγή). Επομένως το ΠΑΤ έχει μοναδική λύση την $\mu_k = \frac{k!}{\lambda^k}, k \geq 0$ οπότε $E(X^k) = \frac{k!}{\lambda^k}, k \geq 0$.

Έτσι π.χ. ο μέσος της κατανομής είναι ο ($k=1$), $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, ενώ επειδή $E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$, η διασπορά της $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

3. $P = N(\mu,\nu)$. Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι υπάρχουν οι ροπές κάθε τάξης. Θα υπολογίσουμε τις ροπές για $k=1,2$. Έχουμε:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \exp\left(-\frac{1}{2\nu}(x-\mu)^2\right) dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp\left(-\frac{1}{2\nu}(x-\mu)^2\right)dx \overset{p=(x-\mu)/\sqrt{\nu}}{\underset{dp = dx/\sqrt{\nu}}{=}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + p\sqrt{\nu}) \exp\left(-\frac{p^2}{2}\right)dp$$

$$= \underbrace{\mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{p^2}{2}\right)dp}_{A} + \underbrace{\sqrt{\nu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} p \exp\left(-\frac{p^2}{2}\right)dp}_{B}.$$

Έχουμε ότι η $\varphi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}p^2\right)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας της $N(0,1)$, οπότε $A = \mu\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(p)dp = \mu$ (γιατί;). Για το B έχουμε χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $z = p^2/2 \Rightarrow dz = p\,dp$,

$$B=\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0}\rho\exp(-\rho^2/2)d\rho+\int_{0}^{+\infty}\rho\exp(-\rho^2/2)d\rho\right]=\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{+\infty}^{0}\exp(-z)dz\right.$$

$$\left.+\int_{0}^{+\infty}\exp(-z)dz\right]=\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{2\pi}}\left[\exp(0)\underbrace{-\underbrace{\lim_{z\to+\infty}\exp(-z)}_{=0}+\underbrace{\lim_{z\to+\infty}\exp(-z)}_{=0}}_{\text{Επομένως δεν υπάρχει απροσδιοριστία}}-\exp(0)\right]$$

$=0$. Άρα $E(X)=A+B=\mu$.

Αναλόγως, $E(X^2)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\exp\left(-\frac{1}{2v}(x-\mu)^2\right)dx$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\exp\left(-\frac{1}{2v}(x-\mu)^2\right)dx\ \underset{d\rho=\frac{1}{\sqrt{v}}dx}{\overset{\rho=(x-\mu)/\sqrt{v}}{=}}\ =\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mu+\rho\sqrt{v})^2e^{-\rho^2/2}d\rho$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mu^2+2\mu\sqrt{v}\,\rho+\rho^2v)e^{-\rho^2/2}d\rho=\underbrace{\mu^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\rho^2/2)d\rho}_{A^*}$$

$$\underbrace{+2\mu\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho\exp(-\rho^2/2)d\rho}_{B^*}+\underbrace{v\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho^2\exp(-\rho^2/2)d\rho}_{\Gamma^*}.$$

$A^*=\mu^2\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\rho)d\rho=\mu^2$ (γιατί;).

$B^*=2\mu\sqrt{v}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\rho\varphi(\rho)d\rho=2\mu\sqrt{v}\cdot 0$ (γιατί;).

$$\Gamma^*=v\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho^2\exp(-\rho^2/2)d\rho=-\frac{v}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(-\rho e^{-\rho^2/2})d\rho=-v\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(e^{-\rho^2/2})'d\rho\right.$$

$$= -v\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[p e^{-p^2/2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p^2/2}\,dp\right] = -\frac{v}{\sqrt{2\pi}}\overbrace{\Big(\underbrace{\lim_{p\to+\infty} pe^{-p^2/2}}_{=0} - \underbrace{\lim_{p\to-\infty} pe^{-p^2/2}}_{=0}\Big)}^{(\text{γιατί;})}$$

$$+ v\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p^2/2}\,dp = v\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(p)\,dp = v.$$

Επομένως, $E(X^2) = \mu^2 + v$. Συνεπώς $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = v + \mu^2 - \mu^2 = v$. (Στους παραπάνω υπολογισμούς είδαμε τη δυνατότητα υπολογισμού ανηγμένη (κατά) στον υπολογισμό κατάλληλων ροπών χαμηλότερης τάξης, κάτι που μας θυμίζει ανάλογους υπολογισμούς στο προηγούμενο παράδειγμα).

Επειδή supp $= \mathbb{R}$ δεν θα έχουμε γενικά ταύτιση του $E(X^k)$ με το $E(|X|^k)$ για k περιττό. Ας υπολογίσουμε την $E(|X|)$ για $\mu=0$, $v=1$ (δηλ. για την τυπική κανονική κατανομή $N(0,1)$ για την οποία έχουμε ότι $E(X)=0$ – γιατί;).

Έχουμε ότι ($\mu=0, v=1$) $E(|X|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|\varphi(x)\,dx =$

$$\int_{-\infty}^{0} -x\varphi(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} x\varphi(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0}(-x)e^{-x^2/2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2/2}\,dx\right]$$

$$\underset{-dp=dx}{\overset{p=-x}{=}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\int_{+\infty}^{0} pe^{-p^2/2}\,dp + \int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2/2}\,dx\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{0}^{+\infty} pe^{-p^2/2}\,dp + \int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2/2}\,dx\right]$$

$$\overset{(\text{γιατί;})}{=} \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2/2}\,dx = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} -xe^{-x^2/2}\,dx = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}\left(e^{-x^2/2}\right)'dx$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[e^{-x^2/2}\Big|_{0}^{+\infty}\right] = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2/2} - e^{-0^2/2}\right] = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,[0-1]$$

$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Επομένως $0 = E(X) \neq \sqrt{\frac{2}{\pi}} = E(|X|)$ για την $N(0,1)$. □

Τεχνικό Σχόλιο: Όπως και στα παραδείγματα υπολογισμού ροπών που είδαμε στις προηγούμενες σημειώσεις και αφορούσαν σε διακριτές κατανομές, έτσι και στα παραπάνω παραδείγματα είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι οι εν λόγω κατανομές χαρακτηρίζονται από τις ροπές τους. Στο επόμενο (και τελευταίο) παράδειγμα αυτό δεν ισχύει.

4. Έστω η κατανομή που έχει supp=$\mathbb{R}$, και συνάρτηση πυκνότητας την
$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

(Χρησιμοποιώντας την τοξεφ(x) είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι η παραπάνω f είναι καλώς ορισμένη συνάρτηση πυκνότητας και συνεπώς ορίζει κατανομή στο $\mathbb{R}$). Η κατανομή αυτή ονομάζεται τυπική κατανομή Cauchy. Θα δείξουμε ότι η $E(X^k)$ δεν υπάρχει $\forall k>0$. Επομένως η εν λόγω κατανομή δεν έχει ούτε μέσο! Εξαιτίας των σχολίων 4 και 6 των προηγούμενων σημειώσεων αρκεί (γιατί;) να δείξουμε ότι $E(|X|)=+\infty$.

Έχουμε λοιπόν ότι
$$E(|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}-xf(x)dx+\int_{0}^{+\infty}xf(x)dx$$
$$=\int_{-\infty}^{0}-x\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx+\int_{0}^{+\infty}x\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx \underset{-dp=dx}{\overset{p=-x}{=}} -\int_{+\infty}^{0}p\frac{1}{\pi(1+p^2)}dp+\int_{0}^{+\infty}x\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx$$
$$=\int_{0}^{+\infty}\frac{p}{\pi(1+p^2)}dp+\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{\pi(1+x^2)}dx \overset{(\gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota};)}{=} \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{2x}{1+x^2}dx \underset{dz=2xdx}{\overset{z=1+x^2}{=}}$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{z}dz=\frac{1}{\pi}\left[\ln z\Big|_{1}^{+\infty}\right]=\frac{1}{\pi}\left[\lim_{z\to+\infty}\ln z-\ln 1\right]=$$
$$\frac{1}{\pi}\left[+\infty-1\right]=+\infty. \ \square$$

Οι σημειώσεις βρίσκονται σε στάδιο διαρκούς διόρθωσης και δεν υποκαθιστούν τις διαλέξεις. Παρακαλώ αναφέρτε όποιο λάθος στο stelios@aueb.gr ή στο e-class του μαθήματος.