Κατανομές Πιθανότητας στους Πραγματικούς- Συνάρτηση Πυκνότητας

Στο τελευταίο παράδειγμα της κανονικής κατανομής παρατηρήσαμε ότι το cdf έχει τη μορφή ολοκληρώματος ως προς κατάλληλη συνάρτηση. Προκύπτοντα ερωτήματα αφορούν στο πότε κάτι τέτοιο είναι εφικτό, τι ιδιότητες έχει η συνάρτηση που ολοκληρώνεται, και αν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αναπαράσταση της κατανομής.

Τα παραπάνω ερωτήματα δεν μπορούν στο πλαίσιο του μαθήματος μας να απαντηθούν με μαθηματική αυστηρότητα καθώς εμπλέκουν έννοιες ανάλυσης, όπως π.χ. μια ισχυρότερη μορφή συνέχειας για συναρτήσεις, και μια έννοια ολοκλήρωσης που δεν ταυτίζεται γενικά με την ολοκλήρωση κατά Riemann, που ξεφεύγουν αρκετά από το υπόβαθρο μας.

Παρόλα αυτά, και επειδή η προκύπτουσα έννοια, δηλαδή αυτή της συνάρτησης πυκνότητας, είναι σημαντική για διάφορους λόγους, όπως π.χ. την ολοκλήρωση κατάλληλων συναρτήσεων ως προς μια κατανομή, ή π.χ. την έννοια της συνάρτησης πιθανοφάνειας στην στατιστική, θα προσπαθήσουμε να την περιγράψουμε αποφεύγοντας ακριβείς μαθηματικές λεπτομέρειες.

Έστω λοιπόν κατανομή πιθανότητας P στους πραγματικούς η οποία έχει ως αθροιστική την F. Αν υπάρχει $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$[*] \quad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz, \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

τότε η f ονομάζεται συνάρτηση πυκνότητας της P (probability density function-pdf).

Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι η f υπάρχει αν η F ικανοποιεί μια έννοια συνέχειας η οποία είναι ισχυρότερη της "συνηθισμένης" συνέχειας, και ονομάζεται απόλυτη συνέχεια (δεν πρόκειται να ασχοληθούμε με αυτήν όμως κάποια/ος ενδιαφέρεται μπορεί να συμβουλευτεί το σχετικό λήμμα της Wikipedia, absolute continuity).

Σχόλιο: Το παραπάνω μας λέει ότι αφού η απόλυτη συνέχεια συνεπάγεται την "συνηθισμένη" συνέχεια, αν η F είναι ασυνεχής τότε η f δεν υπάρχει. Οπότε, π.χ. οι διακριτές κατανομές δεν έχουν συνάρτηση πυκνότητας. Άρα η f δεν υπάρχει πάντα σε αντίθεση με την F. □

Επίσης είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι όταν η f υπάρχει τότε η F είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμη (το οποίο και πάλι για να περιγραφεί με ακρίβεια, μας χρειάζονται έννοιες που δεν έχουμε, αλλά ισχύει π.χ. όταν η F είναι παραγωγίσιμη $\forall x \in \mathbb{R}$, ή όταν η F είναι παραγωγίσιμη $\forall x \in \mathbb{R}$ εκτός ενός διακριτού υποσυνόλου του $\mathbb{R}$), και ισχύει ότι $f(x) = F'(x)$ για κάθε x όπου η F είναι παραγωγίσιμη, ενώ είναι αυθαίρετα ορισμένη στα x για τα οποία η F δεν είναι παραγωγίσιμη.

Σχόλιο: Η δυνατότητα της f, όταν υπάρχει, να ορίζεται αυθαίρετα στα σημεία μη παραγωγισιμότητας της F σημαίνει ότι η f είναι δυνατόν να μην είναι μοναδική, κάτι το οποίο επίσης την κάνει να διαφέρει ως έννοια από την έννοια της αθροιστικής συνάρτησης. □

Η πλήρης κατανόηση του [*] χρειάζεται την έννοια ενός διαφορετικού είδους ολοκληρώματος, από το γνωστό μας (γενικευμένο) ολοκλήρωμα Riemann (και πάλι αυτό είναι εκτός του πλαισίου του μαθήματος, αν κάποια/ος ενδιαφέρεται μπορεί να συμβουλευθεί το λήμμα της Wikipedia - Lebesgue integral). Σε ότι όμως συναντήσουμε παρακάτω θα μπορούμε για κάποιους λόγους να αντιλαμβανόμαστε το ολοκλήρωμα στο [*] ως γενικευμένο ολοκλήρωμα Riemann. Είναι δυνατόν να χρησιμοποιήσουμε ιδιότητες του τελευταίου, προκειμένου να εξάγουμε ιδιότητες της f.

Έστω λοιπόν ότι η P έχει pdf, δηλαδή η f υπάρχει, τότε:

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz = \lim_{x\to+\infty}\int_{-\infty}^{x} f(z)dz \overset{[*]}{=} \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1.$

2. Αν $\alpha<\beta$, $\int_{\alpha}^{\beta} f(z)dz = \int_{-\infty}^{\beta} f(z)dz - \int_{-\infty}^{\alpha} f(z)dz = F(\beta)-F(\alpha)$
$= P((\alpha,\beta]) = P((\alpha,\beta)) = P([\alpha,\beta)) = P([\alpha,\beta])$ αφού αναγκαστικά η F συνεχής.

Επίσης, $\int_{\alpha}^{+\infty} f(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz - \int_{-\infty}^{\alpha} f(z)dz = 1 - F(\alpha) =$

$P((\alpha,+\infty)) = P([\alpha,+\infty))$ αφού η F συνεχής. Τα παραπάνω μας δείχνουν ότι όταν υπάρχει η f, τότε πιθανότητες που η P αποδίδει είναι δυνατόν να εκφράζονται ως ολοκληρώματα (θα ήταν δυνατόν να καταλάβουμε καλύτερα γενίκευση του παραπάνω αν είχαμε στην διάθεσή μας την προαναφερθείσα διαφορετική έννοια ολοκληρώματος).

3. Αν $(\alpha,\beta) \subseteq supp'$, τότε η F σταθερή (γιατί;) και συνεπώς παραγωγίσιμη στο (α,β). Αυτό σημαίνει ότι $f(x)=F'(x)=0$ $\forall x\in(\alpha,\beta)$.

Παραδείγματα.

Στα παρακάτω παραδείγματα είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι η f υπάρχει. Σε κάθε ένα από αυτά είναι επίσης δυνατόν να αποδειχθεί ότι το ολοκλήρωμα είναι ολοκλήρωμα Riemann, ενώ σε κάποια από αυτά η F είναι μη παραγωγίσιμη σε πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Σε αυτά οι τιμές της f είναι δυνατόν να επιλέγονται ώστε η f να είναι συνεχής στο supp, οπότε και προκύπτει ότι $f(x)\geq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

A. $Unif_{[\alpha,\beta]}$. Θυμηθείτε ότι $F(x)=\begin{cases}0, & x<\alpha\\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, & \alpha\leq x<\beta\\ 1, & \beta\leq x\end{cases}$

Η F είναι παντού παραγωγίσιμη εκτός των α,β (δείξτε το). Δυνατόν να αποδ. θ. ότι η f υπάρχει και μπορεί να επιλεγεί ως

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<\alpha\\ \frac{1}{\beta-\alpha}, & \alpha\leq x\leq\beta\\ 0, & \beta<x\end{cases}.$$

B. $Exp(\lambda)$. Θυμηθείτε ότι $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0\end{cases}$.

Η F είναι παντού παραγωγίσιμη εκτός του 0 (δείξτε το). Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι η f υπάρχει και μπορεί να επιλεγεί ως:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0\end{cases}.$$

Γ. $N(\mu, v)$. Θυμηθείτε ότι $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{(z-\mu)^2}{2v}\right) dz$

οπότε είναι εμφανές (γιατί;) ότι η f υπάρχει και $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2v}\right)$.

Παρατηρήσεις:

1. Στο Α για την $Unif_{[0,1]}$ έχουμε ότι $f(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & x\in[0,1] \\ 0, & x>1 \end{cases}$. □

2. Στο Τ για την $N(0,1)$ το pdf (κατ' αναλογία με το cdf) συμβολίζεται με φ, και έχουμε ότι $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.

Η φ είναι άρτια συνάρτηση, δηλ. $\forall x\in\mathbb{R}$ $\varphi(x) = \varphi(-x)$ και εξαιτίας αυτής της ιδιότητας έχουμε ότι:

$$\forall x\in\mathbb{R},\ P((-\infty,x]) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(z)\,dz \underset{\substack{p=-z \\ \Leftrightarrow -p=z \\ \Rightarrow dz=-dp}}{=} \int_{+\infty}^{-x} \varphi(-p)\,(dp)$$

$$= -\int_{+\infty}^{-x} \varphi(-p)\,dp = \int_{-x}^{+\infty} \varphi(p)\,dp = P([-x,+\infty)),$$

επομένως η $N(0,1)$ εμφανίζει αυτού του είδους την "συμμετρία", εξαιτίας της αρτιότητας της φ. □

Οι σημειώσεις βρίσκονται σε στάδιο διαρκούς διόρθωσης και δεν υποκαθιστούν τις διαλέξεις. Παρακαλώ αναφέρτε όποιο λάθος στο stelios@aueb.gr ή στο e-class του μαθήματος.