[Περιλαμβάνει διορθώσεις επισημασμένες με κόκκινο - 30/05/2017]

Κατανομές Πιθανότητας στους Πραγματικούς-Ολοκλήρωση Κατάλληλων Συναρτήσεων ως Προς Κατανομή

Προηγούμενοι υπολογισμοί πιθανοτήτων μέσω της F μας θύμισαν το θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού. Δεδομένου αυτού και αν $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή αναρωτιόμαστε το αν είναι δυνατόν να οριστεί το

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g\,dP \text{ για οποιαδήποτε κατανομή } P$$

στους πραγματικούς. Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι το παραπάνω μπορεί να οριστεί μέσω κατάλληλης γενίκευσης της έννοιας του ολοκληρώματος. Προφανώς κάτι τέτοιο είναι εκτός του εύρους του μαθήματος (αν κάποια/ος ενδιαφέρεται μπορεί να συμβουλευτεί το λήμμα για το ολοκλήρωμα Lebesgue – Stieltjes στη Wikipedia) αλλά σε κάποιες περιπτώσεις είναι δυνατόν το παραπάνω να μας είναι σχετικά "οικείο". Ο παρακάτω ορισμός αναδεικνύει αυτές τις περιπτώσεις, ενώ βάσει των παραπάνω είναι αναγκαστικά ελλιπής και μη ακριβής μαθηματικά.

Ορισμός. Έστω P κατανομή στο $\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιεί τον ορισμό της τυχαίας μεταβλητής. Η αναμενόμενη τιμή της g ως προς την P ορίζεται από:

$$(*) \qquad E(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} g\,dP = \begin{cases} \sum\limits_{i\in \mathrm{supp}P} g(i)P(\{i\}), & P \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\,dx, & \text{η } f \text{ pdf της } P. \end{cases}$$

Σχόλια και κάποιες ιδιότητες:

1. Το παραπάνω είναι ελλιπές καθώς αφορά μόνο σε περιπτώσεις που η P είναι διακριτή ή έχει συνάρτηση πυκνότητας. Ακόμη και τότε όμως το [*] είναι δυνατόν να μην μας είναι "οικείο". Π.χ. αν η P διακριτή και το supp απειροσύνολο, τότε η E(g)

είναι δυνατόν να έχει την μορφή απειροπληθούς αθροίσματος (σειρά) η ακριβής διαχείριση του οποίου είναι εκτός του εύρους του μαθήματος (ισχύει ότι σε ότι σχετικό συναντήσουμε παρακάτω θα αγνοούμε τέτοιες δυσκολίες και θα μπορούμε να το διαχειριζόμαστε όπως τα "συνήθη" αθροίσματα). Π.χ. είναι δυνατόν όταν η f υπάρχει το [*] να μην μπορεί να γίνει "κατανοητό" ως ολοκλήρωμα Riemann [ανάλογως σε ότι συναντήσουμε παρακάτω θα μπορούμε να ερμηνεύουμε τα σχετικά προκύπτοντα ολοκληρώματα ως (ενδεχομένως γενικευμένα) ολοκληρώματα Riemann].

2. Δεν θα ασχοληθούμε ρητά με το αν δεδομένη g ικανοποιεί τον ορισμό της τυχαίας μεταβλητής. Αυτό θα ισχύει σε ότι μας δοθεί παρακάτω, ενώ σε κάποιες περιπτώσεις, π.χ. g συνεχής, θα προκύπτει από τα τότε σχόλια μας για τον ορισμό της τυχαίας μεταβλητής.

3. Θα λέμε ότι η $E(g)$ υπάρχει αν $E(g)\in\mathbb{R}$. Είναι δυνατόν η $E(g)$ να μην υπάρχει (για κάποια g και κάποια P) επειδή στο [*] έχουμε απειρισμούς, ή απροσδιοριστίες, κ.ο.κ. Θα δούμε αργότερα παραδείγματα P και g όπου $E(g)$ δεν υπάρχει. Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι $E(g)\in\mathbb{R}$ αν $E(|g|)\in\mathbb{R}$ (το τελευταίο ισχύει αν $E(|g|)<+\infty$). Όταν η $E(g)$ υπάρχει τότε η g λέγεται ολοκληρώσιμη ως προς την P.

4. Σύμφωνα με το [*] η $E(g)$ εξαρτάται τόσο από την g όσο και από την P. Ένας πιο ακριβής συμβολισμός θα ήταν $E_P(g)$ τον οποίο όμως θα αποφύγουμε για λόγους οικονομίας.

5. Όταν το supp πεπερασμένο, τότε $E(g)$ υπάρχει για κάθε g, αφού τότε σύμφωνα με το [*] η $E(g)$ είναι απλώς ένα "συνηθισμένο" άθροισμα.

6. Αν η g σταθερή, δηλ. $g(x)=c\in\mathbb{R}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ τότε $E(g)=$

$$=\begin{cases}\sum_{i\in supp} cP(\{i\}), & P \text{ διακριτή}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} cf(x)dx, & \text{η } f \text{ pdf της } P\end{cases} = \begin{cases} c\sum_{i\in supp} P(\{i\}), & P \text{ διακριτή}\\ c\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx, & \text{η } f \text{ pdf της } P\end{cases}$$

$$=\begin{cases} cP(supp), & P \text{ διακριτή}\\ c\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx, & \text{η } f \text{ pdf της } P\end{cases} = c.$$ Επομένως κάθε σταθερή

g είναι ολοκληρώσιμη ως προς όποια P [που συνάδει με το [*], αν και αυτό ισχύει γενικότερα.]

7. Αν $g_1, g_2 : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τυχαίες μεταβλητές, $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ τότε αν P τέτοια ώστε $E(g_1), E(g_2)\in\mathbb{R}$, $E(\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2)=\lambda_1 E(g_1)+\lambda_2 E(g_2)$. [γραμμικότητα].

8. Αν g_1, g_2 και P όπως στο 7, και $g_1(x)\leq g_2(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ τότε $E(g_1)\leq E(g_2)$ [μονοτονία].

9. Αν η f υπάρχει για την P, τότε $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx = \int_{supp} g(x)f(x)dx$

$+\int_{supp'} g(x)f(x)dx = \int_{supp} g(x)f(x)dx + \int_{supp'} g(x)0\,dx =$

$\int_{supp} g(x)f(x)dx + \int_{supp'} 0\,dx = \int_{supp} g(x)f(x)dx$ αφού η f

είναι ίση με το 0 στο $supp'$ (εξηγήστε τις λεπτομέρειες, καθώς θα πρέπει να σας γίνεται αντιληπτό ότι τα εμπλεκόμενα ολοκληρώματα είναι ορισμένα.)

Παραδείγματα.

Στα παρακάτω υπολογίζουμε το $E(g)$ για κάποιες g και P, σύμφωνα και με τα όσα είπαμε στα παραπάνω σχόλια.

1. P η εκφυλισμένη κατανομή στο 0. Επειδή το supp πεπερασμένο δείτε το σχόλιο 5. Για όποια κατάλληλη g έχουμε

$$E(g) = \sum_{i \in \{0\}} g(i)P(\{i\}) = g(0)P(\{0\}) = g(0).$$

Δηλαδή εδώ η διαδικασία ισοδυναμεί με τον υπολογισμό της g στο 0. □

2. $P = Ber(q)$. Επειδή το supp πεπερασμένο δείτε το σχόλιο 5. Για όποια κατάλληλη g έχουμε ότι

$$E(g) = \sum_{i \in \{0,1\}} g(i)P(\{i\}) = g(0)P(\{0\}) + g(1)P(\{1\})$$

$$= g(0)(1-q) + g(1)q,$$

επομένως εδώ η διαδικασία ισοδυναμεί με τον υπολογισμό του παραπάνω κυρτού συνδυασμού.

3. $P = Poiss(\lambda)$, $g(x) = e^x$.

Έχουμε ότι $E(g) = \sum_{i \in \mathbb{N}} g(i)P(\{i\}) = \sum_{i=0}^{\infty} e^i e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} (e\lambda)^i / i!$

$= e^{-\lambda} e^{e\lambda} = \exp(-\lambda + e\lambda) = \exp(\lambda(e-1))$, (θέτουμε $x = e\lambda$ στο $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$). □

4. $P = Unif_{[0,1]}$, $g(x) = e^x$.

Έχουμε ότι $E(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} e^x 0 dx + \int_0^1 e^x dx$

$+ \int_1^{+\infty} e^x 0 dx \underset{(\text{γιατί;})}{=} \int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$ □

5. $P = Exp(\lambda)$, $g(x) = e^x$.

Έχουμε ότι $E(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} e^x 0 dx + \int_0^{+\infty} e^x \lambda e^{-\lambda x} dx$

$\underset{(\text{γιατί;})}{=} \lambda \int_0^{+\infty} e^{(1-\lambda)x} dx$. Όταν το $\lambda \leq 1$ τότε το $\lambda \int_0^{+\infty} e^{(1-\lambda)x} dx$

είναι μεγαλύτερο ή ίσο του $\int_0^{+\infty} dx$ (γιατί; Δείξτε το σχόλιο

8). Αλλά
$$\int_0^{+\infty} dx = \lim_{z \to +\infty} x\Big|_0^z = +\infty,$$ οπότε όταν $\lambda \leq 1$

$E(g) = \lambda \int_0^{+\infty} e^{(1-\lambda)x} dx \geq +\infty$, και άρα αυτό είναι παράδειγμα για ύπαρξης. Όταν $\lambda > 1$, τότε $E(g) = \lambda \int_0^{+\infty} e^{(1-\lambda)x} dx$

$$\underset{\left[\begin{array}{l} u=(1-\lambda)x \\ \frac{du}{1-\lambda} = dx \end{array}\right]}{=} \lambda \int_0^{-\infty} e^u \frac{du}{1-\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda-1} \int_{-\infty}^0 e^u du = \frac{\lambda}{\lambda-1} e^x \Big|_{-\infty}^0 =$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda-1} \left(e^0 - \lim_{z \to -\infty} e^z\right) = \frac{\lambda}{\lambda-1}. \square$$

6. $P = N(0,1)$, $g(x) = e^x$.

Έχουμε ότι $E(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2-2x)} dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2-2x\pm 1)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2-2x+1)} e^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$= e^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2} dx = e^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2} dx = e^{1/2}.$$

αφού η $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}$ είναι το pdf της $N(1,1)$ (εξηγείστε). $\square$

Συνέχεια σχολίων και ιδιοτήτων.

10. Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι ο "κατάλογος" $\{E(g),\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, τυχαία μεταβλητή, $E(g)\in\mathbb{R}\}$ αναπαριστά την κατανομή, δηλ. το να γνωρίζουμε όλα αυτά τα χαρακτηριστικά ως προς την P, ισοδυναμεί με το να γνωρίζουμε την P. $\square$