Διάλεξη 27/05/20

Υπενθύμιση: στο τελευταίο μας παράδειγμα είδαμε ότι αν $\mathbb{P}=N(0,1)$ και $g(z)=e^z$ τότε $\mathbb{E}(g)=e^{1/2}$ (Χρησιμοποιήσαμε τεχνική συμπλήρωσης τετραγώνου, όπως κ' το ότι αν η $f$ συνάρτηση πυκνότητας τότε $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz=1$).

Άσκηση: Να βρεθεί η $\mathbb{E}(g)$ όταν $g(z)=e^z$ κ' $\mathbb{P}=N(\mu,v)$ για αυθαίρετα $\mu\in\mathbb{R}$ κ' $v>0$.

Παρατήρηση: Οι υπολογισμοί είναι δυνατόν να είναι περίπλοκοι αφού αφορούν διαδικασίες ολοκλήρωσης.

Γεγονός: Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι το να γνωρίζουμε το $\mathbb{E}(g)$ για δεδομένη $\mathbb{P}$, και κάθε συνάρτηση $g$, ισοδυναμεί με το να γνωρίζουμε την $\mathbb{P}$ [κ' συνεπώς μπορούμε να χρησιμοποιούμε αυτά τα ολοκληρώματα προκειμένου να βρίσκουμε τις πιθανότητες που αποδίδει η $\mathbb{P}$]. Αυτό μας υποδεικνύει ότι μπορούμε να αντιλαμβανόμαστε κάθε $\mathbb{P}$, όχι μόνο ως διαδικασία απόδοσης πιθανοτήτων σε κομμάτια του $\mathbb{R}$, αλλά γενικότερα ως διαδικασίες ολοκλήρωσης!

Ερώτημα. Βάσει του παραπάνω για δεδομένη $\mathbb{P}$, η $\mathbb{E}(g)$ κάθε σχετικής $g$ μας δίνει πληροφορία για ιδιότητες της κατανομής. Τι είδους πληροφορία παίρνουμε για την

$\mathbb{P}$ όταν ολοκληρώνουμε ως προς αυτή πολυωνυμικές συναρτήσεις της μορφής $g(z)=z^k$, για $k=0,1,2,\dots$;

**Ορισμός:** Έστω $\mathbb{P}$ κατανομή πιθανότητας στο $\mathbb{R}$, και $X\sim\mathbb{P}$ (τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την $\mathbb{P}$). Για $k=0,1,2,\dots$

Ροπή $k$-τάξης της $\mathbb{P}$ ονομάζεται το ολοκλήρωμα της $g(z)=z^k$ ως προς την $\mathbb{P}$, δηλ.

$$\mathbb{E}(X^k)=\begin{cases}\sum\limits_{i\in supp} i^k\,\mathbb{P}(\{i\}), & \mathbb{P} \text{ διακριτή}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} z^k f(z)\,dz, & \text{η } \mathbb{P} \text{ έχει την } f \text{ ως συνάρτηση πυκνότητας}\end{cases}$$

Απόλυτη ροπή $k$-τάξης ονομάζεται το ολοκλήρωμα της $g(z)=|z|^k$ ως προς την $\mathbb{P}$, δηλ.

$$\mathbb{E}(|X|^k)=\begin{cases}\sum\limits_{i\in supp} |i|^k\,\mathbb{P}(\{i\}), & \mathbb{P} \text{ διακριτή}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} |z|^k f(z)\,dz, & \text{η } \mathbb{P} \text{ έχει την } f \text{ ως συνάρτηση πυκνότητας.}\end{cases}$$

**Σχόλια:**

Ανισότητα Markov – Εκτός ύλης

* Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι οι ροπές είναι δυνατόν να μας δίνουν πληροφορία για το πώς η $\mathbb{P}$ αποδίδει πιθανότητες. Σε κάποιες περιπτώσεις (όχι πάντα) το να γνωρίζουμε τις ροπές ισοδυναμεί με το να γνωρίζουμε την $\mathbb{P}$ (δεν προλαβαίνουμε να το δούμε)
* Ισχύουν για τα παραπάνω τα γενικά σχόλια που έχουμε κάνει (περί ύπαρξης, κ.ο.κ.) για την ολοκλήρωση.

* Για $k=0$, $z^0 = |z|^0 = 1$, οπότε $\mathbb{E}(X^0) = \mathbb{E}(|X|^0) = 1$ για κάθε $\mathbb{P}$.
* Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι $\mathbb{E}(X^k) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathbb{E}(|X|^k) < +\infty$.
Επίσης ότι αν $\mathbb{E}(X^k) \in \mathbb{R}$ τότε $\mathbb{E}(X^l) \in \mathbb{R}$ για κάθε $0 \leq l \leq k$.
Αντίστοιχως αν η $\mathbb{E}(X^k)$ δεν υπάρχει τότε δεν υπάρχει η $\mathbb{E}(X^l)$, $\forall\, l \geq k$.
* Γνωρίζετε από το μάθημα της Στατιστικής I την έννοια της ροπής $k$-τάξης περί τον μέσο (όταν $\mathbb{E}(X) \in \mathbb{R}$), της διακύμανσης, κ.ο.κ. που βασίζεται στα παραπάνω.
Θυμηθείτε π.χ. η ροπή $k$-τάξης περί τον μέσο είναι η $\mathbb{E}(X-\mathbb{E}(X))^k$

# Παραδείγματα [Υπολογισμού Ροπών]

1. $\mathbb{P}=$ Εκφυλισμένη κατανομή στο $0$

   $-\ supp = \{0\}$

   $-\ \mathbb{P}(\{0\}) = 1$

Επειδή το στήριγμα αποτελείται μόνο από ένα αριθμητικό αριθμό θα έχουμε ότι $\forall k=0,1,\ldots$ $\mathbb{E}(X^k) = \mathbb{E}(|X|^k)$

$$\mathbb{E}(X^k) = 0^k = \begin{cases} 0^0, & k=0 \\ 0^k, & k>0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k>0 \end{cases}$$

Π.χ. Ο μέσος της $\mathbb{P}$ είναι ο $\mathbb{E}(X)=0$

Η διακύμανση της $\mathbb{P}$ είναι $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$

$$= 0 - 0^2 = 0.$$

(Εδώ οι υπολογισμοί είναι απλοί).

2. $\mathbb{P} = Ber(q)$, $q \in (0,1)$ (Bernoulli με παράμετρο $q$)

- $supp = \{0,1\}$
- $\mathbb{P}(\{0\}) = 1-q$, $\mathbb{P}(\{1\}) = q$

Επειδή το στήριγμα δεν έχει αρνητικά στοιχεία ούτε εδώ υπάρχει διάκριση μεταξύ ροπής κ τάξης κ' απόλυτης ροπής κ-τάξης (*)

$$\mathbb{E}(X^k) = \sum_{i \in \{0,1\}} i^k \mathbb{P}(\{i\}) = 0^k \mathbb{P}(\{0\}) + 1^k \mathbb{P}(\{1\})$$

$$= 0^k (1-q) + 1 \cdot q =$$

$$= \begin{cases} 0^0 (1-q) + 1 \cdot q, & k=0 \\ 1 q, & k>0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1, & k=0 \\ q, & k>0. \end{cases}$$

Π.χ. Ο μέσος της $\mathbb{P}$, είναι $\mathbb{E}(X) = q$

Η διακύμανση της $\mathbb{P}$ είναι $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$

$$= q - q^2 = q(1-q).$$

(Και εδώ οι υπολογισμοί είναι απλοί).

4. $\mathbb{P} = Poiss(\lambda)$, $\lambda > 0$ (Poisson με παράμετρο $\lambda$).

- $supp = \mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$
- $\mathbb{P}(\{i\}) = e^{-\lambda} \lambda^i / i!$, $i \in \mathbb{N}$

Και εδώ ισχύει το (*). Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι η $\mathbb{E}(X^k)$ υπάρχει $\forall k = 0,1,\dots$. Ενδεικτικά έχουμε:

Για $k=1$ (μέσος της κατανομής) $\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} i \mathbb{P}(\{i\}) =$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} i e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda}\left( \frac{0 \cdot \lambda^0}{0!} + \frac{1 \cdot \lambda^1}{1!} + \frac{2 \cdot \lambda^2}{2!} + \dots \right)$$

ανεξάρτητο του $i$, κοινός παράγοντας

$0$

$$= e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i \lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(i-1)!} =$$

Υπενθύμιση: $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$

Ανάπτυγμα McLaurin της Εκθετικής Συνάρτησης

Έχουμε στο παρονομαστή τους όρους $i/i!$, $i \geq 1$

$$\frac{i}{i!} = \frac{i}{(i-1)! \, i} = \frac{1}{(i-1)!}$$

$\lambda^i = \lambda \cdot \lambda^{i-1}$, $i \geq 1$

$$= e^{-\lambda} \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{i-1=0}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \underset{j=i-1}{=}$$

κοινός παράγοντας το $\lambda$

$$= e^{-\lambda} \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda+\lambda} =$$

$$= \lambda e^0 = \lambda.$$

Ανάπτυγμα McLaurin της $e^x$ για $x = \lambda$

Συνεπώς ο μέσος της $Poiss(\lambda)$ είναι το $\lambda$ (εδώ παίρνουμε για μια μέση τον πόσο υπολογιστικά περίπλοκες μπορούν να είναι οι ολοκληρώσεις που οδηγούν στις ροπές)

6. $\mathbb{P} = Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$ (Εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda$)

- $supp = [0, +\infty)$
- $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$

Ισχύει το (*). Εδώ μπορούμε να υπολογίσουμε σχετικά εύκολα την $\mathbb{E}(X^k)$ για κάθε $k=0,1,\ldots$. Έχουμε ότι $\mathbb{E}(X^0)=1$.

Για $k\geq 1$ έχουμε

$$\mathbb{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} z^k f(z)dz = \int_{-\infty}^{0} z^k \cdot 0\, dz + \int_{0}^{+\infty} z^k \lambda e^{-\lambda z} dz$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\, dz + \int_{0}^{+\infty} z^k \lambda e^{-\lambda z} dz = \int_{0}^{+\infty} z^k \lambda e^{-\lambda z} dz =$$

αν είχε κ' το – θα ήταν το $(e^{-\lambda z})'$

ισούται με μηδέν επειδή πρόκειται για ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\boxed{\begin{array}{l} \int f\cdot g' = f\cdot g - \int f'\cdot g \quad \text{Παραγοντική ολοκλήρωση} \\ (e^{-\lambda z})' = -\lambda e^{-\lambda z} \end{array}}$$

$$= -\int_{0}^{+\infty} z^k(-\lambda e^{-\lambda z})dz = -\int_{0}^{+\infty} \underset{f}{z^k}\, \underset{g}{(e^{-\lambda z})'}\, dz =$$

$$= -\left[ \underbrace{z^k \cdot e^{-\lambda z}\Big|_{0}^{+\infty}}_{=0} - \int_{0}^{+\infty} (z^k)' e^{-\lambda z} dz \right]$$

$k>0 \quad z^k e^{-\lambda z}\Big|_{z=0} = 0 \qquad (z^k)' = k z^{k-1}$

$$\lim_{z\to+\infty} z^k e^{-\lambda z} = 0$$

$$= -\left[-\int_0^{+\infty} k z^{k-1} e^{-\lambda z}\, dz\right] = k\int_0^{+\infty} z^{k-1} e^{-\lambda z}\, dz$$

$$= \frac{k}{\lambda}\underbrace{\int_0^{+\infty} z^{k-1} \lambda e^{-\lambda z}\, dz}_{\mathbb{E}(X^{k-1})} = \frac{k}{\lambda}\,\mathbb{E}(X^{k-1})$$

Οπότε αναμορφώνοντας έχουμε:

$$\begin{cases} \mathbb{E}(X^0) = 1, & k=0 \\ \mathbb{E}(X^k) = \dfrac{k}{\lambda}\,\mathbb{E}(X^{k-1}), & k \geq 1 \end{cases}$$

Οι ροπές διαφορετικής τάξης συνδέονται αναδρομικά!

Το παραπάνω αποτελεί σημαντικό χαρακτηριστικό της $Exp(\lambda)$, αλλά επίσης μας βοηθάει να υπολογίσουμε τις ροπές χρησιμοποιώντας αυτή την αναδρομική σχέση. Οπότε έχουμε:

$k=0 \quad \mathbb{E}(X^0) = 1 \quad \checkmark$

$k=1 \quad \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(X^0) = \frac{1}{\lambda}$

$k=2 \quad \mathbb{E}(X^2) = \frac{2}{\lambda}\mathbb{E}(X) = \frac{2}{\lambda}\cdot\frac{1}{\lambda} = \frac{1\cdot 2}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$

$k=3 \quad \mathbb{E}(X^3) = \frac{3}{\lambda}\mathbb{E}(X^2) = \frac{3}{\lambda}\,\frac{1\cdot 2}{\lambda^2} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{\lambda^3} = \frac{6}{\lambda^3}$

⋮

Γενικά θα έχουμε ότι $\mathbb{E}(X^k) = \dfrac{k!}{\lambda^k}$

Έτσι π.χ. ο μέσος της $Exp(\lambda)$, είναι το $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

ενώ η διακύμανση της $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

8. Τυπική κατανομή Cauchy (Standard Cauchy distribution)

- supp $= \mathbb{R}$
- έχει ως συνάρτηση πυκνότητας την $f(x) = \dfrac{1}{\pi} \dfrac{1}{1+x^2}$

* Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,dz = 1$ ενώ $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ οπότε η $f$ καλώς ορισμένη.

Για την κατανομή αυτή ισχύει ότι $\mathbb{E}(X^k)$ υπάρχει μόνο για $k=0$, δηλ. δεν υπάρχει ούτε ο μέσος αυτής. Έχουμε:

$$\mathbb{E}(|X|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |z| f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} |z| \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+z^2}\,dz =$$

$$|z| = \begin{cases} -z, & z<0 \\ z, & z \geq 0 \end{cases}$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} (-z) \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+z^2}\,dz}_{A} + \underbrace{\int_{0}^{+\infty} z \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+z^2}\,dz}_{B}$$

$$A = \int_{-\infty}^{0} (-z)\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+z^2}\,dz \underset{\substack{dp=-dz \\ \Leftrightarrow -dp=dz}}{\overset{p=-z}{=}} \int_{+\infty}^{0} p\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(-p)^2}(-dp) =$$

$$= -\int_{+\infty}^{0} p\cdot\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+p^2}\,dp = \int_{0}^{+\infty} p\cdot\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+p^2}\,dp = B$$

Οπότε $A+B = 2B = 2\int_0^{+\infty} z\cdot\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+z^2}\,dz = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \underbrace{2z\underbrace{\frac{1}{1+z^2}}_{\to 1/u}\,dz}_{\to du}$

Θέτουμε $u = 1+z^2$

$du = 2z\,dz$

$$= \frac{1}{\pi}\int_1^{+\infty} \frac{1}{u}\,du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\ln u\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{\pi}\left(\lim_{u\to+\infty}\ln u - \ln 1\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}(+\infty - 0) = +\infty$$

Δηλ. η απόλυτη ροπή 1ης τάξης δεν υπάρχει. Οπότε δεν υπάρχει ούτε ο μέσος της κατανομής ($E(X)$). Οπότε δεν υπάρχει ούτε η $E(X^k)$ για κάθε $k \geq 1$. Δηλ. η μόνη ροπή που υπάρχει είναι η ροπή μηδενικής τάξης.