Διάλεξη 26/05/20

Υπενθύμιση: * Είδαμε γενικά (σε δύο γενικές περιπτώσεις) το πώς είναι δυνατόν να ολοκληρώνουμε συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ως προς κατανομή $\mathbb{P}$:

αν g τυχαία μεταβλητή τότε

$$\mathbb{E}(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} g \, d\mathbb{P} := \begin{cases} \sum_{i \in supp} g(i) \, \mathbb{P}(\{i\}), & \mathbb{P} \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(z) f(z) \, dz, & \text{η } \mathbb{P} \text{ έχει συνάρτηση πυκνότητας την } f \end{cases}$$

αριθμός

Σχόλιο: αν X τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την $\mathbb{P}$

Τότε, για λόγους που αφορούν σε ιδιότητα αντιμετάθεσης που ικανοποιεί το ολοκλήρωμα, αυτό συνήθως συμβολίζεται ως $\mathbb{E}(g(X))$.

* Ασχοληθήκαμε με ιδιότητές του, και στην συνέχεια ξεκινήσαμε με υπολογισμούς σε παραδείγματα.

* όταν $\mathbb{P}$ = συγκεντρωμένη στο 0, τότε $\mathbb{E}(g) = g(0)$, δηλ. το να ολοκληρώσουμε την g ως προς την $\mathbb{P}$ ισοδυναμεί με τον υπολογισμό της $\mathbb{P}$ στο 0 (! δεν ισχύει αυτό γενικά για το ολοκλήρωμα Riemann). Π.χ. $g(z) = e^z$, $\mathbb{E}(g) = e^0 = 1$.

Περαιτέρω Παραδείγματα:

3. $\mathbb{P} = Ber(q)$, $q \in (0,1)$ [Bernoulli με παράμετρο q]

- $supp = \{0,1\}$ → πεπερασμένο άρα όποια g είναι ολοκληρώσιμη ως προς την συγκεκριμένη $\mathbb{P}$.

- $\mathbb{P}(\{0\}) = 1-q$
  $\mathbb{P}(\{1\}) = q$

Έστω $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή. Έχουμε ότι:

$$\mathbb{E}(g) = \sum_{i\in\{0,1\}} g(i)\,\mathbb{P}(\{i\}) = g(0)\,\mathbb{P}(\{0\}) + g(1)\,\mathbb{P}(\{1\})$$

$$= g(0)(1-q) + g(1)q$$

Αν π.χ. $g(z) = e^z$, $\mathbb{E}(g) = e^0(1-q) + e^1 q = 1-q+eq = 1+(e-1)q$.

4. $\mathbb{P} = Poiss(\lambda)$, $\lambda>0$ (κατανομή Poisson με παράμετρο λ)

- $supp = \mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$ → απειροπληθής
- $\mathbb{P}(\{i\}) = e^{-\lambda}\,\lambda^i/i!$, $i\in\mathbb{N}$

είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι υπάρχουν g για τις οποίες το $\mathbb{E}(g)$ δεν υπάρχει.

Έστω $g(z) = e^z$. Για την συγκεκριμένη κατανομή έχουμε

$$\mathbb{E}(g) = \sum_{i\in\mathbb{N}} g(i)\,\mathbb{P}(\{i\}) = \sum_{i=0}^{\infty} e^i e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} =$$

κοινός παράγοντας

$$= e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{e^i\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(e\lambda)^i}{i!}$$

→ πρέπει να το αθροίσουμε υπολογίσουμε

Υπενθύμιση: $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ (ανάπτυγμα McLaurin της εκθετικής συνάρτησης) $x = e\lambda$

Εξαιτίας λοιπόν του αναπτύγματος, για $x = e\lambda$ έχουμε ότι

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(e\lambda)^i}{i!} = \exp(e\lambda),$$ οπότε

$$\mathbb{E}(g) = e^{-\lambda} \exp(e\lambda) = \exp(-\lambda + e\lambda) = \underline{\exp(\lambda(e-1))}.$$

Άρα η g ολοκληρώσιμη ως προς την Pois(λ).

5. $\mathbb{P} = \mathrm{Unif}[0,1]$ (Τυπική ομοιόμορφη)

- Supp $= [0,1]$
- υπάρχει η συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0,1] \\ 1, & x \in [0,1] \end{cases}$$

* Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι αν η g συνεχής το $\mathbb{E}(g)$ υπάρχει.

Έστω $g(z) = e^z$. Έχουμε ότι

$$\mathbb{E}(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z) f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{0} e^z \cdot 0\,dz + \int_0^1 e^z \cdot 1\,dz + \int_1^{+\infty} e^z \cdot 0\,dz$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dz + \int_0^1 e^z\,dz + \int_1^{+\infty} 0\,dz = \int_0^1 e^z\,dz = e^z\Big|_0^1 = e^1 - e^0$$

$$= e - 1$$

Ορισμένα ολοκληρώματα της σταθερής συνάρτησης στο $0 \to$ ισούνται με 0.

Συνεπώς όπως αναμέναμε η $g=e^z$ είναι ολοκληρώσιμη ως προς την $Unif[0,1]$.

6. $\mathbb{P} = Exp(\lambda)$, $\lambda>0$ (Εκθετική κατανομή με παράμετρο λ)

- $supp = [0, +\infty)$
- Έχει συνάρτηση πυκνότητας την

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Έστω και πάλι $g(z)=e^z$, και έχουμε

$$\mathbb{E}(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z) f(z)\, dz = \int_{-\infty}^{0} e^z \cdot 0\, dz + \int_{0}^{+\infty} e^z \lambda e^{-\lambda z} dz$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\, dz + \lambda \int_{0}^{+\infty} e^{(1-\lambda)z} dz = \lambda \int_{0}^{+\infty} e^{(1-\lambda)z} dz \quad (*)$$

Ορισμένο ολοκλήρωμα της σταθερής συνάρτησης στο μηδέν → ισούται με μηδέν

Για το (*) έχουμε τα εξής:

α. Για $\lambda=1$ έχουμε $\lambda \int_{0}^{+\infty} e^{(1-\lambda)z} dz = \int_{0}^{+\infty} dz =$

$$= z \Big|_{0}^{+\infty} = \lim_{z\to+\infty} z - 0 = +\infty$$

Οπότε η e^z δεν είναι ολοκληρώσιμη ως προς την $Exp(1)$.

β. Για $\lambda \neq 1$ έχουμε $\lambda \int_0^{+\infty} e^{(1-\lambda)z} dz \underset{u=(1-\lambda)z}{=} (**)$

$du = (1-\lambda)dz \Leftrightarrow \frac{du}{1-\lambda} = dz$

i. όταν $1-\lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda < 1$ βάσει της παραπάνω αντικατάστασης

$$(**) = \lambda \int_0^{+\infty} e^u \frac{du}{1-\lambda} = \frac{\lambda}{1-\lambda} \int_0^{+\infty} e^u du$$

$$= \frac{\lambda}{1-\lambda} \left(e^u \Big|_0^{+\infty} \right) = \frac{\lambda}{1-\lambda} \left(\lim_{u \to +\infty} e^u - e^0 \right) =$$

$$= \frac{\lambda}{1-\lambda} (+\infty - 1) = +\infty$$

Άρα κ' όταν το $\lambda < 1$ η $g = e^z$ δεν είναι ολοκληρώσιμη ως προς την $Exp(\lambda)$.

ii. όταν $1-\lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda > 1$

$z \to +\infty \Rightarrow (1-\lambda)z \to -\infty$ αφού $1-\lambda < 0$

$$(**) = \lambda \int_0^{-\infty} e^u \frac{dz}{1-\lambda} = \frac{\lambda}{1-\lambda} \int_0^{-\infty} e^u du$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda - 1} \int_{-\infty}^{0} e^u du = \frac{\lambda}{\lambda-1} \left(e^u \Big|_{-\infty}^{0} \right) =$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda-1}\left(e^0 - \lim_{a\to-\infty} \overset{=0}{e^a}\right) = \frac{\lambda}{\lambda-1}(1-0) =$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda-1}$$

Συνεπώς η $g=e^x$ <u>είναι</u> ολοκληρώσιμη ως προς την $Exp(\lambda)$, όταν $\lambda>1$.

Ανακεφαλαιώνοντας έχουμε ότι για την $g=e^x$ κ' $\mathbb{P}=Exp(\lambda)$

$$\mathbb{E}(g) = \begin{cases} +\infty, & \lambda\le 1 \\ \underline{\underline{\frac{\lambda}{1-\lambda}}}, & \lambda>1 \end{cases}$$

Το παράδειγμα κάνει εμφανές προηγούμενο σχόλιο:

η $\mathbb{E}(g)$ εξαρτάται τόσο από την g όσο κ' από την $\mathbb{P}$.

7. $\mathbb{P} = N(0,1)$ (Τυπική κανονική κατανομή)

- supp $\mathbb{R}$
- έχει συνάρτηση πυκνότητας

την $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$

Έστω και τώρα $g(z) = e^z$, και προσπαθούμε να υπολογίσουμε την

$$\mathbb{E}(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z) f(z)\, dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{z - z^2/2}\, dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(z^2 - 2z\right)\right) dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(z^2 - 2z \pm 1\right)\right) dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(z^2 - 2z + 1\right) + \frac{1}{2}\right) dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(z^2 - 2z + 1\right)\right) \exp(1/2)\, dz = \frac{\exp(1/2)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(z-1)^2\right) dz$$

$$= \exp(1/2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z-1)^2\right) dz \; = 1$$

Είναι η συνάρτηση πυκνότητας της $N(1,1)$

Υπενθύμιση: η συνάρτηση πυκνότητας της $N(\mu, v)$ είναι η $\frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(z-\mu)^2}{v}\right)$ οπότε για την $N(1,1)$ έχουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας είναι η $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z-1)^2\right)$

Οπότε το $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z-1)^2\right) dz$ είναι το ολοκλήρωμα σε όλο το $\mathbb{R}$ συνάρτησης πιθανότητας, οπότε αυτό ισούται με 1.

Συνεπώς $\mathbb{E}(g) = \exp(1/2)$.

Η εκθετική συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη ως προς την $N(0,1)$.