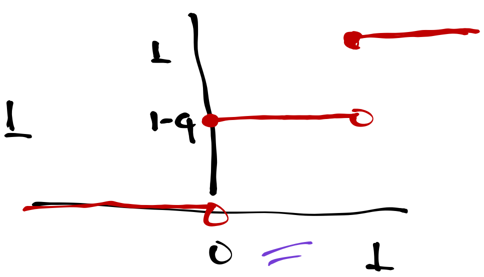
Διάλεξη 05/05/20

Υπενθύμιση:

- αν $\mathbb{P}$ κατανομή πιθανότητας στο $\mathbb{R}$, η αθροιστική αυτής

  $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $F(x) := \mathbb{P}((-\infty, x])$, $x\in\mathbb{R}$

- π.χ. $\mathbb{P} = Ber(q)$, $q\in(0,1)$, $F(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-q, & 0\le x<1 \\ 1, & 1\le x \end{cases}$



- Είδαμε ότι η F έχει τρεις χαρακτηριστικές ιδιότητες:

  α. αύξουσα

  β. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

  γ. από δεξιά συνεχής.

Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι:

Αν η $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις α, β, και γ. Τότε υπάρχει μοναδική κατανομή πιθανότητας στο $\mathbb{R}$, $\mathbb{P}$, της οποίας η F είναι η αθροιστική. (η απόδειξη αυτού απαιτεί μεγαλύτερη γνώση του $\Sigma_{\mathbb{R}}$ – εκτός του εύρους του μαθήματος).

Θεώρημα Χαρακτηρισμού: Αν $\mathbb{P}$ κατανομή πιθανότητας στο $\mathbb{R}$, και $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η αθροιστική συνάρτηση της $\mathbb{P}$, τότε η F ικανοποιεί τις:

α. αύξουσα,

β. $\lim_{x\to-\infty} F(x)=0$, $\lim_{x\to+\infty} F(x)=1$, και

γ. είναι από δεξιά συνεχής.

Αντίστροφα, αν η $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί τις α, β, και γ, τότε υπάρχει μοναδική κατανομή $\mathbb{P}$ στο $\mathbb{R}$ της οποίας η F είναι η αθροιστική.

Σχόλιο: Το θεώρημα επί της ουσίας περιγράφει αμφιμονοσήμαντη σχέση μεταξύ του συνόλου των κατανομών πιθανότητας επί του $\mathbb{R}$ και των συναρτήσεων $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιούν τις α, β, γ. Δηλ. σε κάθε κατανομή $\mathbb{P}$ αντιστοιχεί μοναδική τέτοια F και σε κάθε τέτοια F αντιστοιχεί μοναδική $\mathbb{P}$. Δηλαδή το να γνωρίζουμε την $\mathbb{P}$ ισοδυναμεί με το να γνωρίζουμε την αθροιστική αυτής.

Το παραπάνω σημαίνει:

α. μέσω της F μπορούμε να βρούμε τις πιθανότητες που αποδίδει η $\mathbb{P}$.

β. οι ιδιότητες της $\mathbb{P}$ θα πρέπει να αντανακλώνται σε σχετικές ιδιότητες της F.

Ας δούμε λίγο καλύτερα το τι σημαίνουν τα α, β.

Ξεκινώντας από το β έχουμε ενδεικτικά τα εξής:

Π.χ. ας προσπαθήσουμε να καταλάβουμε το τι σημαίνει για την $\mathbb{P}$ το να είναι η F ασυνεχής (ή συνεχής) σε κάποιο x.

Το να είναι η F ασυνεχής στο x σημαίνει το εξής:

$$\lim_{\substack{y\to x^- \\ \left(\substack{y\to x \\ y\le x}\right)}} F(y) \neq F(x) = \underset{\text{δ.}}{\lim_{y\to x^+}} F(y)$$

Επειδή η F αύξουσα, όταν $\lim_{y\to x^-} F(y) \neq F(x) \iff$

$\lim_{y\to x^-} F(y) < F(x)$ (η F συνεχής στο x αν $\lim_{y\to x^-} F(y) = F(x)$)

Ας εξετάσουμε το $\lim_{y\to x^-} F(y) = \lim_{y\to x^-} \mathbb{P}((-\infty, y]) =$

$\ldots = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, x-1/n]\right)$

Προκύπτει από την συνέχεια της $\mathbb{P}$ και οποιοσδήποτε

$x - 1/n \to x$ καθώς $n\to+\infty$ από αριστερά

Έχουμε ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, x-1/n] = (-\infty, x-1] \overset{\subset}{\cup} (-\infty, x-1/2] \overset{\subset}{\cup}$

$(-\infty, x-1/3] \overset{\subset}{\cup} \ldots \overset{\subset}{\cup} (-\infty, x-1/n] \cup \ldots$

Έστω $z>x$. Θα ισχύει ότι $z\in\bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty,x-1/n]$;

Επειδή $x-1/n<x<z$ $\forall n\in\mathbb{N}$ το z δεν θα βρίσκεται σε κανένα διάστημα της μορφής $(-\infty,x-1/n]$ οπότε $z\notin\bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty,x-1/n]$.

Το $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty,x-1/n]$; Και πάλι, $x-1/n<x$ $\forall n\in\mathbb{N}$ οπότε και το x δεν βρίσκεται σε κανένα διάστημα της μορφής $(-\infty,x-1/n]$ οπότε $x\notin\bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty,x-1/n]$.

Έστω $z<x$. Θα ισχύει ότι $z\in\bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty,x-1/n]$;

Επειδή $x-1/n\to x$ καθώς $n\to+\infty$, θα έχουμε ότι αν $z<x$, θα υπάρχει $n^*\in\mathbb{N}$: $z<x-1/n^* \Leftrightarrow z\in(-\infty,x-1/n^*]$ και επειδή το $(-\infty,x-1/n^*]$ θα είναι παράγοντας της $\bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty,x-1/n]$ (για $n=n^*$) $\Rightarrow z\in\bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty,x-1/n]$.

Άρα $\bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty,x-1/n]=(-\infty,x)$.

Επομένως έχουμε δείξει $\lim_{y\to x^-}F(y)=\mathbb{P}((-\infty,x))$

Επιστρέφουμε στο ζήτημα της ασυνέχειας:

Είδαμε ότι η F ασυνεχής στο x αν

$$F(x) - \lim_{y \to x^-} F(y) > 0 \iff \mathbb{P}((-\infty, x]) - \mathbb{P}((-\infty, x)) > 0$$

(Θυμόμαστε ότι αν $A \supset B$, $\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A - B)$,

$A = (-\infty, x]$, $B = (-\infty, x)$)

$$\iff \mathbb{P}((-\infty, x] - (-\infty, x)) > 0 \iff \mathbb{P}(\{x\}) > 0$$

Δηλαδή έχουμε αποδείξει ότι:

Η F ασυνεχής στο x αν $\mathbb{P}(\{x\}) > 0$

(ισοδύναμα η F συνεχής στο x αν $\mathbb{P}(\{x\}) = 0$).

Παράδειγμα. Αν το $x \notin \mathrm{supp}$ τότε η F συνεχής στο x.

(Δηλ. η F συνεχής εκτός του στηρίγματος)

Παρατήρηση. Αν η $\mathbb{P}$ διακριτή η F θα είναι ασυνεχής σε κάθε στοιχείο του στηρίγματος.

Επομένως βάσει του προηγούμενου έχει συσχετισθεί το αν η $\mathbb{P}$ αποδίδει μηδενική ή μη πιθανότητα σε κάποιο μεμονωμένο σημείο με το αν η F είναι σε αυτό συνεχής ή μη.

Αντιστοίχως είναι δυνατόν να αποδειχθούν και άλλα όπως π.χ.

- σε διαστήματα εκτός του στηρίγματος η F σταθερή.
- η F γνησίως αύξουσα εντός του στηρίγματος

κ.ο.κ.

α. Πως γνωρίζοντας την F μπορούμε να βρούμε τις πιθανότητες που αποδίδει η $\mathbb{P}$;

Π.χ. έστω ότι θέλουμε να εκφράσουμε μέσω της F την πιθανότητα που αποδίδει η $\mathbb{P}$ στο A:

- $A = (-\infty, x]$ Έχουμε ότι $\mathbb{P}((-\infty,x]) = F(x)$
- $A = (-\infty, x)$ » » $\mathbb{P}((-\infty,x)) = \lim_{y \to x^-} F(y)$
- $A = \{x\}$ » » $\mathbb{P}(\{x\}) = F(x) - \lim_{y \to x^-} F(y)$
- $A = (x, +\infty)$ » » $\mathbb{P}((x,+\infty))$

$= 1 - \mathbb{P}((-\infty, x]) = 1 - F(x)$

- $A = [x, +\infty)$ Έχουμε ότι $\mathbb{P}([x,+\infty)) =$

$$= 1 - \mathbb{P}((-\infty, \alpha)) = 1 - \lim_{y \to \alpha^-} F(y)$$

- $A = \{\alpha, \beta\}$, $\mathbb{P}(\{\alpha, \beta\}) = \mathbb{P}(\{\alpha\}) + \mathbb{P}(\{\beta\})$

$$= F(\alpha) - \lim_{y \to \alpha^-} F(y) + F(\beta) - \lim_{y \to \beta^-} F(y)$$