Διάλεξη 28/04/20

Συνέχεια παραδείγματος κατ. Poisson: $\lambda>0$

α. $supp=\mathbb{N}$

β. $i\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\{i\})=e^{-\lambda}\lambda^i/i!$) $\to$ Poiss(λ)

— Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα (Mc Laurin) $e^x=\sum_{i=0}^{\infty} x^i/i!$ $\forall x\in\mathbb{R}$, είδαμε ότι τα α,β συμφωνούν καλώς ορισμένη διακριτή κατανομή στο $\mathbb{R}$ (Poiss(λ)).

Παραδείγματα υπολογισμού πιθανοτήτων για την Poiss(λ)

$\mathbb{P}(A)$: — $A=(0,1)$, $\mathbb{P}((0,1))=\mathbb{P}((0,1)\cap supp)$

$=\mathbb{P}((0,1)\cap\mathbb{N})=\mathbb{P}(\emptyset)=0$

— $A=\{0,1\}$, $\mathbb{P}(\{0,1\})=\mathbb{P}(\{0,1\}\cap supp)$

$=\mathbb{P}(\{0,1\}\cap\mathbb{N})=\mathbb{P}(\{0,1\})=\mathbb{P}(\{0\}\cup\{1\})$

$\overset{\text{προσθ.}}{=}\mathbb{P}(\{0\})+\mathbb{P}(\{1\})=e^{-\lambda}\underbrace{\lambda^0/0!}_{1}+e^{-\lambda}\underbrace{\lambda^1/1!}_{\lambda}$

$=e^{-\lambda}1+e^{-\lambda}\lambda=e^{-\lambda}(1+\lambda)$

— $A=[0,1]$, $\mathbb{P}([0,1])=\mathbb{P}([0,1]\cap supp)=$

$=\mathbb{P}([0,1]\cap\mathbb{N})=\mathbb{P}(\{0,1\})=\ldots=e^{-\lambda}(1+\lambda)$

— $A=\{x\in\mathbb{R}: x^2=1\}=\{-1,1\}$

$\mathbb{P}(\{x\in\mathbb{R}: x^2=1\})=\mathbb{P}(\{-1,1\}\cap supp)=$

$=\mathbb{P}(\{-1,1\}\cap\mathbb{N})=\mathbb{P}(\{1\})=e^{-\lambda}\lambda^1/1!=e^{-\lambda}\cdot\lambda$

$- A = \mathbb{Z}$ → σύνολο των ακεραίων

$$\mathbb{P}(\mathbb{Z}) = \mathbb{P}(\mathbb{Z} \cap supp) = \mathbb{P}(\mathbb{Z} \cap \mathbb{N})$$
$$= \mathbb{P}(\mathbb{N}) = 1.$$

Παρατήρηση: αν $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ με $\lambda_1 \neq \lambda_2$ έχουμε ότι $Poiss(\lambda_1) \neq Poiss(\lambda_2)$, οπότε έχουμε τόσες κατανομές Poisson όσες κ' οι διαφορετικές τιμές που μπορεί να πάρει το λ. Συνεπώς στο παράδειγμα εξετάσαμε την οικογένεια από κατανομές Poisson.

Παρατήρηση: Είναι δυνατόν να χρησιμοποιήσουμε τα προηγούμενα παραδείγματα και αιτήσιμες τυχαίες μεταβλητές προκειμένου να κατασκευάσουμε περαιτέρω παραδείγματα διακριτών (φροντιστήριο)

Υπάρχουν κ' άλλα παραδείγματα διακριτών που δεν μπορούν να προκύψουν έτσι.

Υπενθύμιση — Ταξινόμηση των κατανομών βάσει των ιδιοτήτων του στηρίγματός τους:

α. Διακριτές — Το supp διακριτό (σύνολα περιγράφιμες)

β. Συνεχείς — Το supp έχει την μορφή διαστήματος ή ένωσης διαστημάτων (π.χ. ομοιόμορφη, ευθετική, κανονική κατανομή, κ.λπ.)

γ. Μεικτές — Το supp έχει ένα διακριτό μέρος κ' είναι ξένο ως

Προς το προηγούμενο συνεχές μέρος. (π.χ. το supp θα μπορούσε να είναι το $\{0\} \cup [1,2]$)

διακριτό μέρος — διάστημα

(θα δούμε κάποια ενδεικτικά παραδείγματα μεικτών χωρίς να ασχοληθούμε με αυτές στην συνέχεια).

δ. Ιδιάζουσες κατανομές — το supp οποιασδήποτε τέτοιας κατανομής δεν είναι ούτε διακριτό ούτε συνεχές ούτε μεικτό π.χ. supp = Cantor Set και η κατανομή Cantor (δείτε Wikipedia).
(δεν θα ασχοληθούμε καθόλου με τέτοιου είδους κατανομές).

Οι b, c, s δεν είναι "εύκολα" περιγράψιμες, και για να περιγραφούν θα μας χρειαστούν αναπαραστάσεις των κατανομών από πιο οικείες έννοιες. Θα δούμε τρεις αναπαραστάσεις:

i. την αθροιστική συνάρτηση
ii. την συνάρτηση πυκνότητας
iii. την αντίληψη της κατανομής ως διαδικασίας σφουγήρωσης.

I. Αθροιστική Συνάρτηση (Cumulative Distribution Function - cdf)

- Πρόκειται για συνάρτηση $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Αν γνωρίζουμε την αθροιστική μπορούμε να βρίσκουμε τις πιθανότητες που αποδίδονται από την κατανομή, οπότε γνωρίζουμε την κατανομή.
- Υπάρχει και είναι μοναδική για κάθε κατανομή πιθανότητας στο $\mathbb{R}$.

Ορισμός: Έστω ότι $\mathbb{P}$ είναι κατανομή πιθανότητας επί του $\mathbb{R}$. Αθροιστική συνάρτηση της $\mathbb{P}$ ($F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) είναι αυτή που ορίζεται ως:

$$F(x) \underset{\text{ορισμός}}{:=} \mathbb{P}((-\infty, x]),$$

για όποιο $x \in \mathbb{R}$.

Παρατήρηση: αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}((-\infty, x]) \in \mathbb{R}$ η F είναι πάντοτε καλώς ορισμένη.

Παραδείγματα:

1. Εκφυλισμένη κατανομή στο 0: $\quad supp = \{0\}$, $\mathbb{P}(\{0\}) = 1$

Ποια είναι η F της εκφυλισμένης κατανομής;

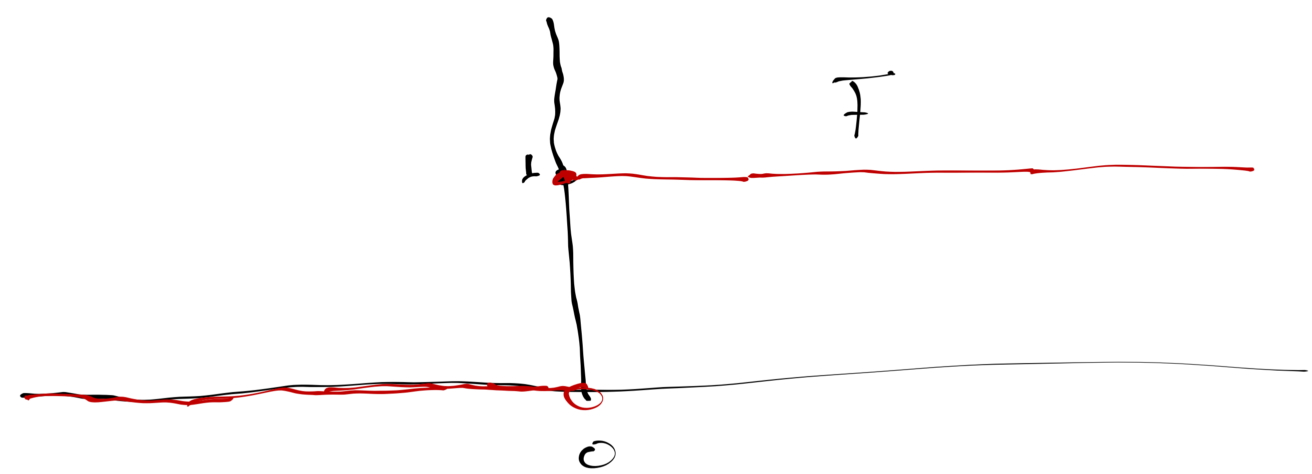
Έχουμε ότι αν $x \in \mathbb{R}$, πρέπει να υπολογίσουμε το $\mathbb{P}((-\infty, x])$ ως προς αυτή την κατανομή,

Οπότε $(-\infty, x] \cap supp = (-\infty, x] \cap \{0\} = \begin{cases} \emptyset, & x<0 \\ \{0\}, & x \geq 0 \end{cases}$

συνεπώς $F(x) = \mathbb{P}((-\infty, x]) = \begin{cases} \mathbb{P}(\emptyset), & x<0 \\ \mathbb{P}(\{0\}), & x \geq 0 \end{cases} =$

$= \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$

και το γράφημα αυτής είναι το



2. Bernoulli με παράμετρο $q \in (0,1)$: $supp = \{0,1\}$, $\mathbb{P}(\{0\}) = 1-q$, $\mathbb{P}(\{1\}) = q$

Ποιά είναι η F της συγκεκριμένης κατανομής;

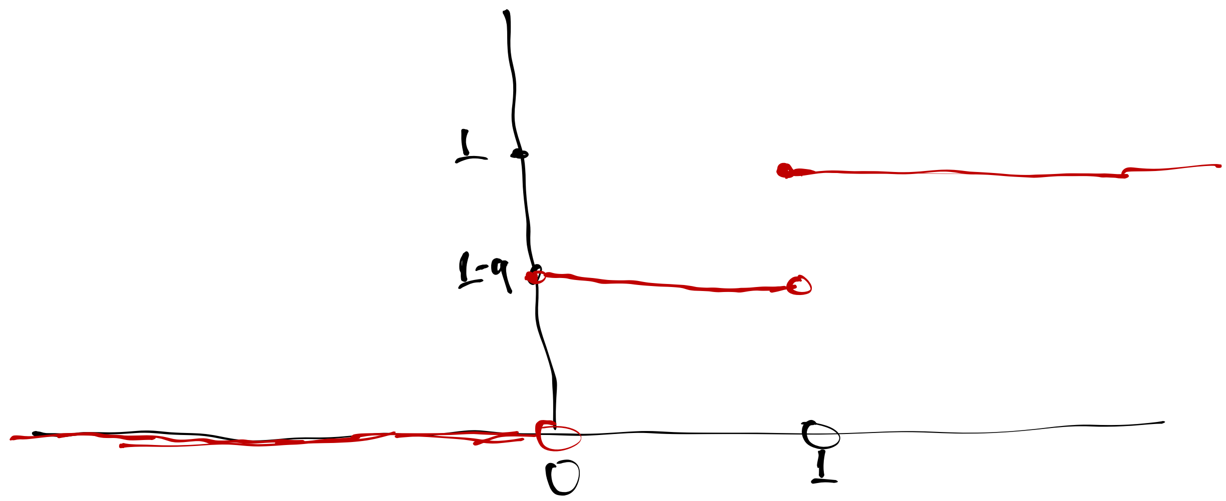
Έστω $x \in \mathbb{R}$, θα πρέπει να βρούμε την $\mathbb{P}((-\infty, x])$

Έχουμε ότι $(-\infty, x] \cap supp = (-\infty, x] \cap \{0,1\} =$

$$\begin{cases} \emptyset, & x<0 \\ \{0\}, & 0 \leq x < 1 \\ \{0,1\}, & x \geq 1 \end{cases}$$

Επομένως: $F(x) = \mathbb{P}((-\infty, x]) = \begin{cases} \mathbb{P}(\emptyset), & x<0 \\ \mathbb{P}(\{0\}), & 0\le x<1 \\ \mathbb{P}(\{0,1\}), & x\ge 1 \end{cases}$

$$= \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-q, & 0\le x<1 \\ 1, & x\ge 1 \end{cases}$$



Στο φροντιστήριο θα δούμε τις αθροιστικές συναρτήσεις για την διωνυμική και την Poisson.

Αύριο θα δούμε τις χαρακτηριστικές ιδιότητες της F και το γιατί η F αναπαριστά την $\mathbb{P}$ αυτής.