Διάλεξη: 15-04-20

Διακριτές κατανομές πιθανότητας στο $\mathbb{R}$

Συνέχεια παραδείγματος 3. (Διωνυμική Κατανομή με παραμέτρους $n \in \mathbb{N}^*$, $q \in (0,1)$ - $Bin(n,q)$)

$n, i \in \mathbb{N}$, $n \geq i$

$\binom{n}{i} := \frac{n!}{i!(n-i)!}$

— $supp = \{0,1,2,\dots,n\}$ → $n+1$

— $\mathbb{P}(\{i\}) = \binom{n}{i} q^i (1-q)^{n-i}$, $i \in supp$

Έλεγχος καλώς ορισμένου: ...

iii $\mathbb{P}(supp) = \mathbb{P}(\{0,1,2,\dots,n\}) = \dots = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} q^i (1-q)^{n-i}$ (*)

$\overset{?}{=} 1$

Διωνυμικό Ανάπτυγμα - Binomial Expansion

Αν $\alpha, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ τότε

$$(\alpha+b)^n = \boxed{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \alpha^i b^{n-i}}$$

αν μας χρειάζεται κάπου θα μας δίνεται!

Μπορούμε να διαισθανθούμε εύκολα ότι βάσει του παραπάνω: αν π.χ. $n=0$ $(\alpha+b)^0 = 1$

π.χ. $n=1$ $(\alpha+b)^1 = \alpha+b$

π.χ. $n=2$ $(\alpha+b)^2 = \alpha^2+\alpha b+b\alpha+b^2$

⋮

Παρατηρούμε ότι η δεξιά πλευρά του διων. αναπτ. είναι το (*) όταν θέσουμε $\alpha=q$, $b=1-q$

Συνεπώς έχουμε $(*) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} q^i (1-q)^{n-i} \underset{\text{Διων.Αν.}}{=} (\cancel{q}+1-\cancel{q})^n$

$= 1^n = 1.$

Επομένως έχουμε $\mathbb{P}(supp) = 1$ άρα και το iii επιβεβαιώνεται, συνεπώς το παράδειγμα περιγράφει μια καλώς ορισμένη διακριτή κατανομή την οποία ονομάζουμε Διωνυμική.

Π.χ. Έστω ότι $n=2$, $\underline{Bin(2,q)}$

$supp = \{0,1,2\}$

$\mathbb{P}(\{i\}) = \binom{2}{i} q^i (1-q)^{2-i}$ πεπερ. συν.

$A = (0,1)$, $\mathbb{P}((0,1)) = \mathbb{P}((0,1) \cap supp) = \mathbb{P}(\underbrace{(0,1)}_{\text{διάστημα}} \cap \{0,1,2\})$

$= \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

$A = [0,1]$, $\mathbb{P}([0,1]) = \mathbb{P}([0,1] \cap supp) = \mathbb{P}([0,1] \cap \{0,1,2\})$

$= \mathbb{P}(\{0,1\}) \underset{\text{προσθ.}}{=} \mathbb{P}(\{0\}) + \mathbb{P}(\{1\}) =$

$= \binom{2}{0} q^0 (1-q)^{2-0} + \binom{2}{1} q^1 (1-q)^{2-1}$

$= \frac{2!}{0!(2-0)!}(1-q)^2 + \frac{2!}{1!(2-1)!} q(1-q)$ $\quad 2! = 2$

$\frac{2!}{2!} = 1$

$= (1-q)^2 + 2q(1-q) = (1-q)[1-q+2q]$

$= \underline{(1-q)(1+q)}$

$A = \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}(\mathbb{Z}) = \mathbb{P}(\mathbb{Z} \cap supp) = \mathbb{P}(\mathbb{Z} \cap \{0,1,2\})$

$= \mathbb{P}(\{0,1,2\}) = \mathbb{P}(supp) = 1.$

Άσκηση. Επαναλάβετε τα παραπάνω για την περίπτωση $n=3$, $q=1/4$ $(Bin(3,1/4))$.

Παρατηρήσεις: 1. Η $Bin(n,q)$ εξαρτάται από το διάνυσμα των παραμέτρων $\binom{n}{q}$. Για διαφορετικές τιμές αυτού του διανύσματος παίρνουμε για διαφορετική διωνυμική κατανομή. Συνεπώς υπάρχουν τόσες διωνυμικές κατανομές όσες κ' οι διαφορετικές τιμές τις οποίες επιτρέπεται να λάβει το $\binom{n}{q}$. Άρα το παραπάνω περιγράφει επί της ουσίας την οικογένεια από διωνυμικές κατανομές.

2. Θέτοντας $n=1$, η $Bin(1,q)$ ορίζεται ως $supp = \{0,1\}$

$$\mathbb{P}(\{0\}) = \binom{1}{0} q^0 (1-q)^{1-0} = \frac{1!}{0!(1-0)!} 1-q = 1-q$$

$$\frac{1}{1\cdot 1} = 1$$

$$\mathbb{P}(\{1\}) = \binom{1}{1} q^1 (1-q)^{1-1} = \frac{1!}{1!(1-1)!} q = q.$$

$$\frac{1}{1\cdot 1} = 1$$

Δηλ. $Bin(1,q) = Ber(q)$

Συνεπώς η οικογένεια των Διωνυμικών εμπεριέχει ως υποοικογένεια τις Bernoulli για $n=1$.

Άσκηση. Τι θα συνέβαινε στα παραπάνω αν επιτρέπονταν τα $q=0$ ή $q=1$.

4. Κατανομή Poisson ως προς παράμετρο $\lambda>0$

$(\mathrm{Pois}(\lambda))$

- $\mathrm{supp} = \mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$
- $\mathbb{P}(\{i\}) = e^{-\lambda}\, \lambda^i / i!\ , \quad i\in\mathbb{N}$

Περιγράφουν τα παραπάνω κανώς ορισμένη διακριτή κατανομή; Ελέγχουμε: i. το $\mathrm{supp}=\mathbb{N}$ είναι διακριτό.

ii. $\mathbb{P}(\{i\}) = \underbrace{e^{-\lambda}}_{>0} \underbrace{\frac{\lambda^i}{i!}}_{i!>0} > 0 \ \forall i$, επειδή $\lambda>0$

Επομένως η πιθανότητα που αποδίδεται σε κάθε στοιχείο του supp είναι αυστηρά θετική.

iii. $\mathbb{P}(\mathrm{supp}) = \mathbb{P}(\mathbb{N}) = \mathbb{P}(\{0,1,2,\dots\}) \underset{\text{αρ.προσ.}}{=} \underbrace{\mathbb{P}(\{0\})+\mathbb{P}(\{1\})+ +\mathbb{P}(\{2\})+\dots+\mathbb{P}(\{n\})+\dots}$

σύνολο των φυσικών.

→ απειροπληθές αριθμήσιμο άθροισμα

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{i\}) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} =$$

Απειροπληθές άθροισμα που στα μαθηματικά αναφέρεται πραγματική σειρά.

→ Μαθηματικά ΙΙΙ.

→ Χωρίς να εξηγούμε το γιατί, σε τέτοιου είδους αθροίσματα που θα συναντήσουμε σε αυτό το μάθημα θα μπορούμε να τα διαχειριζόμαστε αλγεβρικά όπως τα συνήθη πεπερασμένα αθροίσματα, π.χ. να βγάζουμε κοινούς παράγοντες.

$$= \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} + e^{-\lambda}\frac{\lambda^1}{1!} + e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!} + \dots + e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} + \dots$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \quad (*)$$

$\longrightarrow$ αρκεί να υπολογίσουμε αυτό.

$x=\lambda$

Ανάπτυγμα McLaurin της e^x

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Εξαιτίας του παραπάνω αναπτύγματος έχουμε (θέτουμε $x=\lambda$)

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{\lambda}$$ συνεπώς $$(*) = e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i/i! = e^{-\lambda}e^{\lambda} = e^{-\lambda+\lambda} = e^0 = 1.$$

Επομένως έχουμε $\mathbb{P}(supp) = \dots = 1$ επομένως

Τα παραπάνω περιγράφουν μια καλώς ορισμένη διακριτή κατανομή που ονομάζεται κατανομή Poisson με παρ. λ.

...