Διάλεξη 14/04/20

(Συνέχεια παραδείγματος εκφυλισμένης κατανομής στο 0)

Υπενθύμιση
- $\text{supp} = \{0\}$ ✓
- $\mathbb{P}(\{0\}) = 1$ ✓

— αν $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ τότε $\mathbb{P}(A) = \begin{cases} 0, & 0 \notin A \\ 1, & 0 \in A \end{cases}$

π.χ. $A = (0,1)$, $\mathbb{P}((0,1)) \overset{0\notin(0,1)}{=} 0$ $\qquad A = \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\mathbb{N}) \overset{0\in\mathbb{N}}{=} 1$

$A = [0,1]$, $\mathbb{P}([0,1]) \overset{0\in[0,1]}{=} 1$ $\qquad A = \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\mathbb{N}^*) \overset{0\notin}{=} 0$

$\mathbb{N} - \{0\}$

$A = [0,1)$, $\mathbb{P}([0,1)) \overset{0\in[0,1)}{=} 1$,

$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 2\} = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \not\ni 0$

$\mathbb{P}(\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 2\}) = 0$

— Είναι δυνατόν να ορισθούν άλλες κατανομές με $\text{supp} = \{0\}$

Επειδή θα πρέπει $\mathbb{P}(\{0\}) = 1$, η μοναδική κατανομή με αυτό το στήριγμα είναι η παραπάνω.

Προσπαθήστε ως άσκηση: αν $x \in \mathbb{R}$, να ορίσετε την εκφυλισμένη κατανομή στο x. (Είναι δυνατόν να δειχθεί ότι για κάθε x, η εκφυλισμένη κατανομή στο x είναι δυνατόν να παραχθεί από την εκφυλισμένη στο μηδέν κ' κατάλληλης τυχαίας μεταβλητής — φροντιστήριο!).

2. Κατανομή Bernoulli με παράμετρο $q \in (0,1)$
$(Ber(q))$

$$- \ supp = \{0,1\} \rightarrow \text{δύο στοιχεία}$$
$$- \ \mathbb{P}(\{0\}) = 1-q \ , \ \mathbb{P}(\{1\}) = q$$

Είναι το παραπάνω καλώς ορισμένο;

i. το στήριγμα που έχει δοθεί είναι πεπερασμένο, άρα διακριτό. ii. $\mathbb{P}(\{0\}) > 0$, $q \neq 1$, $\mathbb{P}(\{1\}) > 0$, $q \neq 0$.
iii. $\mathbb{P}(supp) = \mathbb{P}(\{0,1\}) = \mathbb{P}(\{0\}) + \mathbb{P}(\{1\}) = 1-q+q = 1$.

Συνεπώς το παραπάνω ορίζει μια καλώς ορισμένη διακριτή κατανομή επί του $\mathbb{R}$, που ονομάζεται Bernoulli με παράμετρο q.

Αν $A \in \mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$, ποιό είναι $\mathbb{P}(A)$ για την $Ber(q)$;

Έχουμε ότι
$$A \cap supp = A \cap \{0,1\} = \begin{cases} \emptyset, & 0,1 \notin A \\ \{0\}, & 0 \in A, 1 \notin A \\ \{1\}, & 0 \notin A, 1 \in A \\ \{0,1\}, & 0,1 \in A \end{cases}$$

Οπότε
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap \{0,1\}) = \begin{cases} \mathbb{P}(\emptyset), & 0,1 \notin A \\ \mathbb{P}(\{0\}), & 0 \in A, 1 \notin A \\ \mathbb{P}(\{1\}), & 0 \notin A, 1 \in A \\ \mathbb{P}(\{0,1\}), & 0,1 \in A \end{cases} = \begin{cases} 0, & 0,1 \notin A \\ 1-q, & 0 \in A, 1 \notin A \\ q, & 0 \notin A, 1 \in A \\ 1, & 0,1 \in A \end{cases}$$

π.χ. $A = (0,1)$, $\mathbb{P}((0,1)) \overset{0,1 \notin A}{=} 0$ $\qquad$ $A = (0,1]$, $\mathbb{P}((0,1]) \overset{0 \notin A, 1 \in A}{=} q$

$A = [0,1]$, $\mathbb{P}([0,1]) \overset{0,1 \in A}{=} 1$ $\qquad$ $A = \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}(\mathbb{Z}) \overset{0,1 \in A}{=} 1$

$A = [0,1)$, $\mathbb{P}([0,1)) \overset{0 \in A, 1 \notin A}{=} 1-q$

σύνολο των ακεραίων

$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$, $\mathbb{P}(\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\}) \overset{0 \notin A, 1 \in A}{=} 0$, κ.ο.κ.

- Αν $q_1, q_2 \in (0,1)$, $q_1 \neq q_2$, $Ber(q_1) \neq Ber(q_2)$

Επειδή για την $Ber(q_1)$ έχουμε $\mathbb{P}(\{0\}) = q_1$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \#\qquad\quad \#$
για την $Ber(q_2)$ » $\mathbb{P}(\{0\}) = q_2$

Δηλ. κάθε διαφορετική τιμή του q προσδιορίζει φανομένως για διαφορετική κατανομή Bernoulli. Δηλ. έχουμε τόσες κατανομές Bernoulli όσες και οι τιμές που μπορεί να πάρει το q. Δηλ. έχουμε τόσες κατανομές Bernoulli όσα κ' τα στοιχεία $(0,1)$.

Συνεπώς σε αυτό το παράδειγμα έχουμε περιγράψει μια ολόκληρη οικογένεια από κατανομές που "περιγράφονται" από την παράμετρο q.

- Τι θα συνέβαινε αν επιτρέπαμε $q=0$ ή/και $q=1$; (Άσκηση)

3. Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n \in \mathbb{N}^*$, $q \in (0,1)$
(Binomial distribution) - $Bin(n,q)$

- $supp = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ → $n+1$ στοιχεία

Υπενθύμιση: $! : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

αν $i \in \mathbb{N}$ $\quad i! = \begin{cases} 1, & i=0 \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots i, & i>0 \end{cases}$

$$\binom{n}{i} := \frac{n!}{i!\,(n-i)!}$$

↳ πλήθος συνδυασμών
n ως προς i, $i, n \in \mathbb{N}$, $i \leq n$

$- \; i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}, \; \mathbb{P}(\{i\}) := \binom{n}{i} q^i (1-q)^{n-i}$

π.χ. $\mathbb{P}(\{0\}) = \binom{n}{0} q^0 (1-q)^{n-0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!}(1-q)^n = \frac{n!}{n!}(1-q)^n = (1-q)^n$

...

Το προηγούμενο περιγράφει καλώς ορισμένη διακριτή κατανομή;

i. το supp είναι πεπερασμένο άρα διακριτό. ii.

επειδή $q \neq 0$, $q \neq 1$, $\binom{n}{i} q^i (1-q)^{n-i} > 0 \quad \forall i = 0, 1, \dots, n$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad > 0 \quad > 0 \quad > 0$

Συνεπώς $\forall i = 0, 1, \dots, n \quad \mathbb{P}(\{i\}) > 0$.

iii. $\mathbb{P}(\text{supp}) = \mathbb{P}(\{0, 1, 2, \dots, n\}) = \mathbb{P}(\{0\}) + \mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) + \dots + \mathbb{P}(\{n\}) =$

$$= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(\{i\}) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} q^i (1-q)^{n-i} \overset{?}{=} 1$$

(Διωνυμικό ανάπτυγμα - Binomial Expansion)

θα μας χρειαστεί!