Διάλεξη 08/04/20

- Διακριτή ονομάζεται όποια κατανομή επί του $\mathbb{R}$ της οποίας το supp είναι διακριτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

(δηλ. οι πραγματικοί αρ. που το απαρτίζουν είναι απομονωμένοι μεταξύ τους, δηλ. θα έχει την μορφή $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ δηλ. θα είναι είτε πεπερασμένο είτε θα έχει πλήθος ίσο με το πλήθος των φυσικών – "άπειρο" ή αριθμήσιμο πλήθος – εφαρμόζεται η αριθμήσιμη προσθετικότητα ως προς τα στοιχεία του supp)

- Οι διακριτές είναι οι "εύκολα περιγράψιμες" κατανομές αφού:

αν η $\mathbb{P}$ είναι διακριτή και το $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap \text{supp}) = \mathbb{P}(A \cap \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}) =$$

$$= \mathbb{P}(A \cap \{x_1\}) + \mathbb{P}(A \cap \{x_2\}) + \dots + \mathbb{P}(A \cap \{x_n\}) + \dots$$

$$x_i \in \text{supp}, \ \mathbb{P}(A \cap \{x_i\}) = \begin{cases} \mathbb{P}(\emptyset), & x_i \notin A \\ \mathbb{P}(\{x_i\}), & x_i \in A \end{cases} = \begin{cases} 0, & x_i \notin A \\ \mathbb{P}(\{x_i\}), & x_i \in A \end{cases}$$

- Δηλ. για να βρούμε το $\mathbb{P}(A)$ όταν η $\mathbb{P}$ διακριτή αρκεί να γνωρίζουμε τα ποια στοιχεία του supp βρίσκονται στο A και ποια είναι η πιθανότητα που αποδίδει η $\mathbb{P}$ σε καθένα από αυτά.

Οπότε για να περιγράψουμε μια διακριτή κατανομή αρκεί να γνωρίζουμε το στήριγμά της και την πιθανότητα που αυτή αποδίδει σε κάθε στοιχείο του στηρίγματος.

Χθεσινή Εργασία: Τι τιμή μπορεί να έχει το $\mathbb{P}(\{x_i\})$ όταν η $\mathbb{P}$ διακριτή κ' $x_i \in supp$;

Λήμμα. Αν η $\mathbb{P}$ διακριτή και το $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(\{x\}) > 0$ ανν $x \in supp$.

Απόδειξη: Έχουμε να δείξουμε τα

α. αν $\mathbb{P}(\{x\}) > 0$ τότε $x \in supp$, και

β. αν $x \in supp$ τότε $\mathbb{P}(\{x\}) > 0$

Για το α έχουμε: ισοδυνάμως αρκεί να δείξουμε ότι αν $x \notin supp$ τότε $\mathbb{P}(\{x\}) = 0$. Έχουμε ότι

$$\text{αν } x \notin supp \Leftrightarrow x \in supp' \Leftrightarrow \{x\} \subseteq supp' \overset{\text{μον.}}{\Longrightarrow}$$
$$\mathbb{P}(\{x\}) \leq \mathbb{P}(supp') = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(\{x\}) = 0.$$

(Στο παραπάνω δεν χρησιμοποιήθηκε πουθενά ότι η $\mathbb{P}$ είναι διακριτή - ισχύει για όποια κατανομή πιθανότητας)

β. Χρησιμοποιούμε απαγωγή σε άτοπο. Έστω χωρίς απώλεια γενικότητας ότι στο $x_1 \in supp$ έχουμε ότι $\mathbb{P}(\{x_1\}) = 0$.

Θεωρούμε το $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} - \{x_1\} = supp - \{x_1\} = \{x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$

Το $supp - \{x_1\}$ είναι επίσης διακριτό. Συνεπώς είναι μετρητό. Επίσης $supp - \{x_1\} \subset supp$. Υπολογίζουμε την

$$\mathbb{P}(supp - \{x_1\}) = \mathbb{P}(supp) - \mathbb{P}(\{x_1\}) = 1 - 0 = 1$$

$A \supseteq B$ $\quad \mathbb{P}(A-B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$

$A = supp \quad B = \{x_1\}$

Άρα η υπόθεση $\mathbb{P}(\{x_1\})=0$ μας οδηγεί στο

$$\mathbb{P}(supp-\{x_1\})=1.$$

Αλλά είδαμε ότι το $supp-\{x_1\}$ είναι κλειστό, και $supp-\{x_1\} \subsetneq supp$. Άρα έχουμε βρει κλειστό γνήσιο υποσύνολο του supp στο οποίο η $\mathbb{P}$ αποδίδει μοναδιαία πιθανότητα. Αυτό είναι άτοπο επειδή το supp εξ' ορισμού είναι το μικρότερο κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο η $\mathbb{P}$ αποδίδει πιθανότητα 1. Άρα $\mathbb{P}(\{x_1\})>0$. Επειδή το x_1 το επιλέξαμε χωρίς οποιαδήποτε γενικότητας αυτό θα ισχύει για κάθε στοιχείο του supp. □

[Το β. δεν ισχύει γενικά για κατανομές που δεν είναι διακριτές. Θα δούμε παραδείγματα κατανομών που δεν είναι διακριτές και οι οποίες είτε σε κάποια είτε σε κάθε στοιχείο του στηρίγματος τους αποδίδουν μηδενική πιθανότητα].

Συνεπώς για να περιγράψω μια διακριτή κατανομή αρκεί να γνωρίζω:

α. Το supp, και

β. η πιθανότητα που αποδίδεται σε κάθε στοιχείο του supp.

Επομένως για να ελέγχω το αν μία περιγραφή διακριτής κατανομής που βασίζεται στα α, β είναι καλώς ορισμένη αρκεί να ελέγχω i. αν το supp είναι διακριτό, ii. το αν η πιθανότητα που αποδίδεται σε κάθε στοιχείο του στηρίγματος είναι αυστηρά θετική, και iii. το αν $\mathbb{P}(supp)=1$.

Βάσει της παραπάνω διαδικασίας μπορούμε να δεικνύσουμε να βλέπουμε παραδείγματα διακριτών κατανομών.

Παραδείγματα Διακριτών κατανομών.

Στα παραδείγματα το στήριγμα θα μεγαλώνεται.

1. Εκφυλισμένη κατανομή στο 0.

Πρόκειται για την κατανομή που ορίζεται από τα:

α. $supp = \{0\}$

β. $\mathbb{P}(\{0\}) = 1$

i. Το στήριγμα διακριτό αφού είναι πεπερασμένο. ii. $\mathbb{P}(\{0\})=1>0$ επομένως σε κάθε στοιχείο του στηρίγματος αποδίδεται αυστηρά θετική πιθανότητα. iii $\mathbb{P}(supp) = \mathbb{P}(\{0\}) = 1$.

Άρα το παραπάνω προσδιορίζει για μοναδικά ορισμένη διακριτή κατανομή που ονομάζεται εκφυλισμένη κατανομή στο 0.

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα που αποδίδει η συγκεκριμένη κατανομή σε όποιο $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ θα έχουμε

το $$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap supp) = \mathbb{P}(A \cap \{0\}) = \begin{cases} \mathbb{P}(\emptyset), & 0 \notin A \\ \mathbb{P}(\{0\}), & 0 \in A \end{cases} = \begin{cases} 0, & 0 \notin A \\ 1, & 0 \in A \end{cases}$$

(αυτή είναι η Q που είδαμε σε προηγούμενες διαλέξεις).