Διάλεξη 07/04/20

1. Θα ασχοληθούμε με την έννοια του στηρίγματος κατανομής πιθανότητας επί των πραγματικών:

α. θα μας βοηθήσει στο να ταξινομήσουμε τις κατανομές επί του $\mathbb{R}$ (συνακόλουθα να καταλάβουμε ποιες από αυτές περιγράφονται "εύκολα").

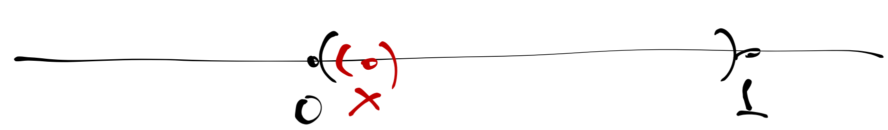
β. θα μας βοηθήσει σε κάποιες περιπτώσεις στον υπολογισμό πιθανοτήτων.

Προεργασία:

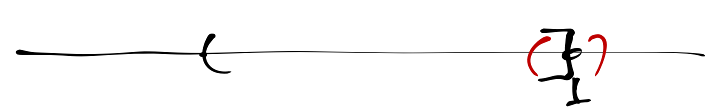
1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, αυτό θα ονομάζεται ανοικτό (open) αν $\forall x \in A$ υπάρχει ανοικτό διάστημα με κέντρο το x τέτοιο ώστε να εμπεριέχεται όλο μέσα στο A.

Π.χ. $A = (0,1)$

ανοικτό.



Αντιπαράδειγμα $A = (0,1]$



δεν είναι ανοικτό.

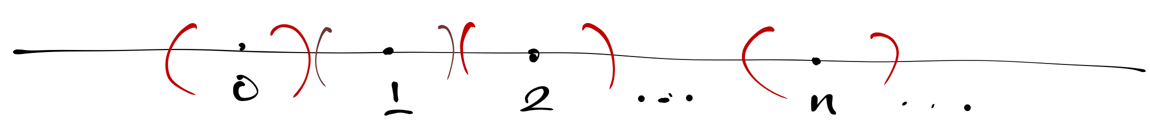
Προφανή παραδείγματα ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ είναι το $\emptyset$, $\mathbb{R}$, τα ανοικτά διαστήματα, κ.ο.κ.

Δυικά, το $A \subseteq \mathbb{R}$ θα ονομάζεται κλειστό (closed) αν το A' είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Προφανή παραδείγματα κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ είναι το $\mathbb{R}$, το $\emptyset$, τα κλειστά διαστήματα, τα πεπερασμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$, κ.ο.κ.

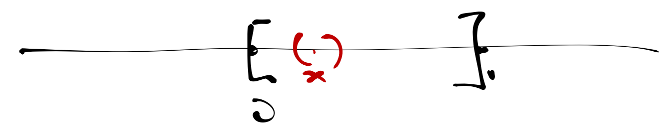
2. Το $A \subseteq \mathbb{R}$ θα ονομάζεται διακριτό (discrete) αν αποτελείται από απομονωμένους μεταξύ τους πραγματικούς αριθμούς, δηλ. $\forall x \in A$ υπάρχει ανοικτό διάστημα με κέντρο το x, που περιλαμβάνει μόνο το x και κανένα άλλο στοιχείο του A.

Π.χ. $A = \mathbb{N}$



Είναι διακριτό γιατί κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να "απομονωθεί" από τους υπόλοιπους μέσω ανοικτού διαστήματος.

Αντιπαράδειγμα $A = [0,1]$



δεν είναι διακριτό.

Προφανή παραδείγματα διακριτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ είναι το $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, τα πεπερασμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$, κ.ο.κ.

Παρατήρηση: Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι κάθε διακριτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι κλειστό, και έχει "μικρό" πλήθος στοιχείων (δηλ. είναι πεπερασμένο ή έχει πλήθος ίσο με το πλήθος των φυσικών).

Στήριγμα.

Ορισμός 'Εστω $\mathbb{P}$ κατανομή πιθανότητας επί του $\mathbb{R}$.
Στήριγμα της $\mathbb{P}$ (support – supp) θα αναφέρεται το μικρότερο κλειστό και μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο η $\mathbb{P}$ αποδίδει μοναδιαία πιθανότητα (δηλ. θα είναι σύνολο πλήρους πιθανότητας για τη $\mathbb{P}$)

Διευκρίνιση: ο προσδιορισμός "μικρότερο" θα σημαίνει το εξής: αν το $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$, το A κλειστό, το $A \subset$ supp $\mathbb{P}(A) < 1$.

Παρατήρηση: Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι για κάθε κατανομή πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ το στήριγμα της είναι καλώς ορισμένο και μοναδικό.

Σημασία του στηρίγματος:

α. Μπορεί να είναι επιβοηθητικό στον υπολογισμό πιθανοτήτων.

'Εστω η $\mathbb{P}$ κατανομή στο $\mathbb{R}$, με στήριγμα το supp, και έστω $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$, και θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα που η $\mathbb{P}$ αποδίδει στο A:

συλλογή από τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ στα οποία μπορεί να αποδοθεί πιθανότητα

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap \text{supp}) + \mathbb{P}(A \cap \text{supp}') \quad (*)$$

$$(\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B'))$$

$A \cap supp' \subseteq supp' \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap supp') \leq \mathbb{P}(supp')$
για.

$= 1 - \mathbb{P}(supp) = 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A \cap supp') = 0$ οπότε

$(*) \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap supp)$

μπορεί να διευκολύνει στους υπολογισμούς.

β. Μας βοηθάει να ταξινομήσουμε τις κατανομές επί των πραγματικών αριθμών βάσει των ιδιοτήτων των στηριγμάτων τους ως εξής:

α. διακριτές κατανομές
β. συνεχείς κατανομές
γ. μεικτές κατανομές
δ. ιδιάζουσες κατανομές.

α. Διακριτές κατανομές (Discrete Distributions)

Ορισμός 'Εστω $\mathbb{P}$ κατανομή πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Αυτή θα ονομάζεται διακριτή αν το supp αυτής είναι διακριτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Θα δούμε αμέσως ότι οι διακριτές κατανομές είναι αυτές που περιγράφονται "εύκολα" χωρίς να υπάρχει η ανάγκη ανάπτυξης περαιτέρω εννοιών.

Αυτό συμβαίνει εξαιτίας του εξής: Έστω η $\mathbb{P}$ διακριτή επομένως το supp αυτής διακριτό, δηλ. έχει την εξής μορφή $\text{supp} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$

"απομονωμένοι πραγματικοί"

μπορεί να είναι και απειροπληθές

Έστω $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$, οπότε έχουμε

$$\mathbb{P}(A) \underset{\text{δηλ. παραπάνω}}{=} \mathbb{P}(A \cap \text{supp}) = \mathbb{P}(A \cap \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\})$$

$$\underset{\text{αριθ. προσθ.}}{=} \mathbb{P}(A \cap \{x_1\}) + \mathbb{P}(A \cap \{x_2\}) + \dots + \mathbb{P}(A \cap \{x_n\}) + \dots$$

Έχουμε επίσης ότι αν $x_i \in \text{supp}$ τότε

$$\mathbb{P}(A \cap \{x_i\}) = \begin{cases} \mathbb{P}(\emptyset), & x_i \notin A \\ \mathbb{P}(\{x_i\}), & x_i \in A \end{cases} = \begin{cases} 0, & x_i \notin A \\ \mathbb{P}(\{x_i\}), & x_i \in A \end{cases}$$

τι συμβαίνει με αυτή την πιθ.;