Ροπές Κατανομής Πιθανότητας

ορισμός : Έστω κατανομή $\mathbb{P}$ στο $\mathbb{R}$ και $X \sim \mathbb{P}$. Τότε η ροπή k-τάξης της $\mathbb{P}$ είναι το ολοκλήρωμα ως προς την $\mathbb{P}$ της $g(x) = x^k$

$$E(X^k) = \begin{cases} \sum_{i \in supp} i^k \, \mathbb{P}(\{i\}), & \mathbb{P} \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x)\,dx, & \text{η } f \text{ είναι pdf της } \mathbb{P} \end{cases}$$

Η απόλυτη ροπή k-τάξης ορίζεται ως

$$E(|X|^k) = \begin{cases} \sum_{i \in supp} |i|^k \cdot \mathbb{P}(\{i\}), & \mathbb{P} \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k \cdot f(x)\,dx, & \text{η } f \text{ είναι pdf της } \mathbb{P}. \end{cases}$$

Παρατηρήσεις

i. Είναι δυνατόν η $E(g)$ α. να μην υπάρχει, β. να απειρίζεται, γ. να είναι πραγματικός αριθμός. Μόνο στην περίπτωση γ. θα λέμε ότι η $E(g)$ υπάρχει.

ii. Η $E(g(x))$ εξαρτάται και από τη $g(x)$ αλλά και από την $\mathbb{P}$.

Άσκηση 1

Έστω X τυχαία μεταβλητή που αναπαριστά το αποτέλεσμα της ρίψης ενός αμερόληπτου ζαριού. Να βρεθεί η ροπή 2ης τάξης και η διακύμανση της X.

Λύση

γνωρίζουμε ότι $supp = \{1,2,3,4,5,6\}$ και $\mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{6}$ $\forall i \in supp$

Εξ ορισμού έχουμε για $k=2$: Ροπή 2ης τάξης

$$E(X^2) = \sum_{i \in supp} i^2 \cdot \mathbb{P}(\{i\}) = \sum_{1}^{6} i^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2) = \frac{91}{6}$$

Ροπή 1ης τάξης : $E(X) = \sum_{i \in supp} (\{i\}) \mathbb{P}(\{i\}) = \sum_{i=1}^{6} i \, \mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6}$

Διακύμανση : $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \simeq 2.92$

Άσκηση 2

Έστω τυχαία μεταβλητή $X \sim \exp$ με $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = a^x$, όπου $0 < a < e$ ($e \approx 2.71828$). Να βρεθεί η αναμενόμενη τιμή της g ως προς την κατανομή της X. Δίνεται η pdf της εκθετικής κατανομής. Για λόγους απλούστευσης θεωρούμε ότι $\lambda = 1$

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Λύση

$$E(g(x)) = E(a^x) = \int_{-\infty}^{+\infty} a^x \cdot f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} a^x \cdot e^{-x}\,dx = \int_{-\infty}^{0} a^x \cdot 0\,dx + \int_{0}^{+\infty} a^x \cdot e^{-x}\,dx$$

$$= -\int_{0}^{+\infty} a^x \cdot (-e^{-x})\,dx = -\int_{0}^{+\infty} a^x \cdot (e^{-x})'\,dx = -\left[a^x \cdot e^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} (a^x)' \cdot e^{-x}\,dx =$$

$$= \left[-\frac{a^x}{e^x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{+\infty} a^x \cdot \ln a \cdot e^{-x}\,dx = -\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a}{e}\right)^x + \left(\frac{a}{e}\right)^0 + \ln a \int_0^{+\infty} a^x \cdot e^{-x}\,dx$$

$$\Rightarrow E(a^x) = 1 + \ln a \cdot E(a^x) \Rightarrow E(a^x) = \frac{1}{1 - \ln a}$$

όπου, $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a}{e}\right)^x = 0$, διότι $0 < \frac{a}{e} < 1$

και $\int_0^{+\infty} a^x \cdot e^{-x}\,dx = E(a^x)$

Ορισμός: Αναμενόμενη τιμή τυχαίας μεταβλητής (Πιττης, σελ. 316)

Έστω ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \Sigma_\Omega, \mathbb{P})$, η τυχαία μεταβλητή $X: \Omega \to \mathbb{R}$, η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής. $\mathbb{P}_X$ και η μετρήσιμη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Η $g(X)$ είναι τυχαία μεταβλητή ως προς τον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \Sigma_\Omega, \mathbb{P})$. Η αναμενόμενη τιμή της τ.μ. $g(X)$ δίνεται από:

$$E(gX) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x)\,dx$$

Άσκηση 3

Έστω $X \sim \exp(\lambda)$, $\lambda>0$. Να βρεθεί η απόλυτη ροπή k-τάξης και ακολούθως, να δειχτεί ότι $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Δίνονται:

- pdf της εκθετικής κατανομής: $f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$
- συνάρτηση Γάμμα: $\int_0^{+\infty} t^a \cdot e^{-t} dt = \Gamma(a+1) = a!$
- $supp = [0,+\infty)$ (γιατί;)

Λύση

Από ιδιότητες ροπών γνωρίζουμε ότι εφόσον το στήριγμα της κατανομής είναι $[0,+\infty)$ η ροπή k-τάξης ταυτίζεται με την απόλυτη ροπή k-τάξης, $E(X^k) = E(|X|^k)$.

$$E(X^k) = \int_{supp} x^k \cdot f(x) dx = \int_0^{+\infty} x^k \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx \overset{\text{πολ/με και διαιρούμε με } \lambda^k}{=}$$

$$= \frac{1}{\lambda^k} \int_0^{+\infty} \lambda \cdot \lambda^k \cdot x^k \cdot e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda^k} \int_0^{+\infty} (\lambda \cdot x)^k \cdot e^{-\lambda x} dx$$

αλλαγή μεταβλητής: $t = \lambda x \Rightarrow dt = \lambda dx \Rightarrow dx = \frac{1}{\lambda} dt$

$\lambda>0$, όρια: $t_1 = 0$, $t_2 = +\infty$

$$= \frac{\lambda}{\lambda^k} \int_0^{+\infty} t^k \cdot e^{-t} \cdot \frac{1}{\lambda} dt = \lambda^{-k} \int_0^{+\infty} t^k \cdot e^{-t} dt = \lambda^{-k} \cdot \Gamma(k+1) = \lambda^{-k} \cdot k!$$

Υπολογισμός Ροπών

ροπή 1ης τάξης: $k=1 \Rightarrow E(X) = \lambda^{-1} \cdot 1! = \frac{1}{\lambda}$

ροπή 2ης τάξης: $k=2 \Rightarrow E(X^2) = \lambda^{-2} \cdot 2! = \frac{2}{\lambda^2}$

Διακύμανση: $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

Άσκηση 4

Έστω $X \sim Gamma(a,b)$, όπου $a,b>0$. Να βρείτε τη ροπή k-τάξης της κατανομής και να δείξετε ότι $Var(X) = \frac{a}{b^2}$.

Δίνονται:

- pdf της Γαμμα κατανομής $f(x;a,b) = \begin{cases} \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \cdot e^{-bx}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

- $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} \, dt = (a-1)!$

- $supp = [0,+\infty)$ (γιατί?)

Λύση

Εξ ορισμού γνωρίζουμε ότι η ροπή k-τάξης ορίζεται ως εξής

$$E(X^k) = \int_{supp} x^k \cdot f(x;a,b)\,dx = \int_0^{+\infty} x^k \cdot \frac{b^a}{\Gamma(a)} \cdot x^{a-1} \cdot e^{-bx} dx$$

$$= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} x^{k+a-1} \cdot e^{-bx} dx \overset{\text{πολ/ζουμε κ' διαιρούμε } b^{k+a-1}}{=} \frac{b^a}{b^{k+a-1} \cdot \Gamma(a)} \int_0^{+\infty} b^{k+a-1} \cdot x^{k+a-1} \cdot e^{-bx} dx$$

$$= \frac{b^a}{b^{k+a-1} \cdot \Gamma(a)} \int_0^{+\infty} (bx)^{k+a-1} \cdot e^{-bx} dx \underset{\substack{t=bx \\ \Rightarrow dx = \frac{1}{b}dt}}{\overset{\text{θέτουμε}}{=}} \frac{b^a}{b^{k+a-1}\Gamma(a)} \cdot \int_0^{+\infty} t^{k+a-1} \cdot e^{-t} \cdot \frac{1}{b} dt$$

$$= \frac{b^{-k}}{\Gamma(a)} \underbrace{\int_0^{+\infty} t^{k+a-1} \cdot e^{-t} \cdot dt}_{\Gamma(a+k)} = \frac{b^{-k}}{\Gamma(a)} \cdot \Gamma(a+k)$$

Ροπή 1ης τάξης: $k=1 \Rightarrow E(X) = \frac{b^{-1}}{\Gamma(a)} \cdot \Gamma(a+1) = \frac{b^{-1} \cdot a!}{(a-1)!}$

$$= \frac{1}{b} \cdot \frac{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{(a-1)} a}{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdots \cancel{(a-1)}} = \frac{a}{b}$$

Ροπή 2ης τάξης: $k=2 \Rightarrow E(X^2) = \frac{1}{b^2} \cdot \frac{\Gamma(a+2)}{\Gamma(a)} = \frac{1}{b^2} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdots (a-1) \cdot a(a+1)}{1 \cdot 2 \cdots (a-1)}$

$$= \frac{1}{b^2} \cdot a(a+1)$$

Διακύμανση: $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{a(a+1)}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} = \frac{a}{b^2}$