Υπολογισμός Πιθανοτήτων με την CDF

Εφόσον η F αναπαριστά την $\mathbb{P}$, θα πρέπει μέσω της F να μπορούμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες που αποδίδει η $\mathbb{P}$.

Εξ ορισμού γνωρίζουμε ότι:

$$\mathbb{P}((-\infty, x]) = F(x), \quad \mathbb{P}((-\infty, x)) = \lim_{y \to x^-} F(y)$$

Συνεπώς, η πιθανότητα σημείου x διακριτής κατανομής ορίζεται ως:

$$\mathbb{P}(\{x\}) = F(x) - \lim_{y \to x^-} F(y)$$

Για $a < \beta$ υπολογίζουμε τις πιθανότητες που αποδίδονται στα παρακάτω διαστήματα:

→ $\mathbb{P}((a, \beta]) = F(\beta) - F(a)$

πως σκέφτομαι: $\mathbb{P}((-\infty, \beta]) = \mathbb{P}((-\infty, a] \cup (a, \beta])$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}((-\infty, \beta]) = \mathbb{P}((-\infty, a]) + \mathbb{P}((a, \beta])$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}((a, \beta]) = \underbrace{\mathbb{P}((-\infty, \beta])}_{F(\beta)} - \underbrace{\mathbb{P}((-\infty, a])}_{F(a)}$$

→ $\mathbb{P}([a, \beta)) = \lim_{x \to \beta^-} F(x) - \lim_{x \to a^-} F(x)$

πως σκέφτομαι: $\mathbb{P}((-\infty, \beta)) = \mathbb{P}((-\infty, a) \cup [a, \beta))$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}((-\infty, \beta)) = \mathbb{P}((-\infty, a)) + \mathbb{P}([a, \beta))$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}([a, \beta)) = \underbrace{\mathbb{P}((-\infty, \beta))}_{\lim_{x \to \beta^-} F(x)} - \underbrace{\mathbb{P}((-\infty, a))}_{\lim_{x \to a^-} F(x)}$$

$\mathbb{P}([a,\beta])$

σκέψη: $\mathbb{P}((-\infty,\beta]) = \mathbb{P}((-\infty,a) \cup [a,\beta])$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}((-\infty,\beta]) = \mathbb{P}((-\infty,a)) + \mathbb{P}([a,\beta])$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}([a,\beta]) = \underbrace{\mathbb{P}((-\infty,\beta])}_{F(\beta)} - \mathbb{P}((-\infty,a))$$

$$F(\beta) - \lim_{y \to a^-} F(y)$$

Παράδειγμα

Έστω μετρήσιμος χώρος $(\mathbb{R}, \Sigma_{\mathbb{R}})$. Να βρεθεί η αθροιστική συνάρτηση για την κατανομή Poisson, $Pois(\lambda)$.

Δίνονται: $\operatorname{supp}\mathbb{P} = \{0,1,2,\dots\}$, $\mathbb{P}(\{x\}) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$, $\forall x \in \operatorname{supp}\mathbb{P}$

$$\lambda \in (0,+\infty)$$

Λύση

$$x<0 \Rightarrow F(x) = \mathbb{P}((-\infty,x]) = \mathbb{P}((-\infty,x] \cap \operatorname{supp}\mathbb{P}) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

$$0 \le x < 1 \Rightarrow F(x) = \mathbb{P}((-\infty,x]) = \mathbb{P}((-\infty,x] \cap \operatorname{supp}\mathbb{P}) = \mathbb{P}(\{0\}) = e^{-\lambda}$$

$$1 \le x < 2 \Rightarrow F(x) = \mathbb{P}((-\infty,x]) = \mathbb{P}((-\infty,x] \cap \operatorname{supp}\mathbb{P}) = \mathbb{P}(\{0,1\})$$

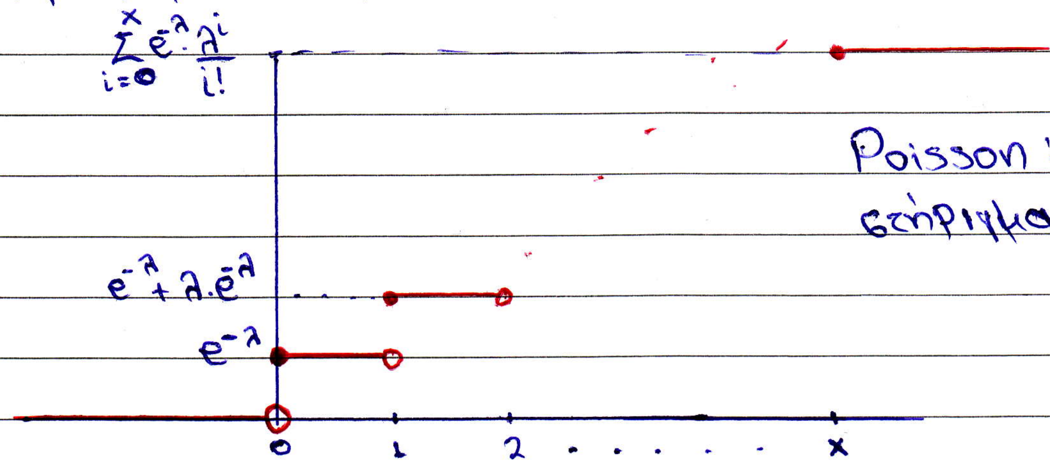
$$= \mathbb{P}(\{0\}) + \mathbb{P}(\{1\})$$

$$= e^{-\lambda} + \lambda \cdot e^{-\lambda}$$

$\vdots$

$$F(x) = \begin{cases} \mathbb{P}(\emptyset), & x<0 \\ \sum_{i=0}^{x} \mathbb{P}(\{i\}), & x \ge 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x<0 \\ e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{x} \frac{\lambda^i}{i!}, & x \ge 0 \end{cases}$$

Γράφημα: Αθροιστική Poisson



Poisson: απειροπληθές στήριγμα με ασυνέχειες

Υπολογισμός Πιθανοτήτων

π.χ. $P(\{0\}) = F(0) - \lim_{y\to 0^-} F(y) = e^{-\lambda} - 0 = e^{-\lambda}$

$P(\{2\}) = F(2) - \lim_{y\to 2^-} F(y) = e^{-\lambda} + e^{-\lambda}\cdot\lambda + e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^2}{2} - e^{-\lambda} - e^{-\lambda}\lambda$

$= e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^2}{2}$

Επιβεβαίωση Ιδιοτήτων της F

1. $\lim_{x\to -\infty} F(x) = 0 \quad \forall x<0$

$\lim_{x\to +\infty} F(x) = 1$, διότι $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{x}\frac{\lambda^i}{i!}\right) = e^{-\lambda}\underbrace{\left(\lim_{x\to+\infty}\sum_{i=0}^{x}\frac{\lambda^i}{i!}\right)}_{\text{MacLaurin}}$

$= e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1$

2. Έστω $x_1 < x_2$ τότε $F(x)$ είναι μη φθίνουσα

Αν $x_1, x_2 < 0 \Rightarrow F(x_1) = F(x_2) = 0$

$x_1 < 0 \le x_2 \Rightarrow F(x_1) = 0 < F(x_2) = e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{x_2}\frac{\lambda^i}{i!}$

$0 < x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) < F(x_2)$

3. Από δεξιά συνεχής: $\lim_{x\to 0^+} F(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-\lambda}\cdot\sum_{i=0}^{x}\frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}$

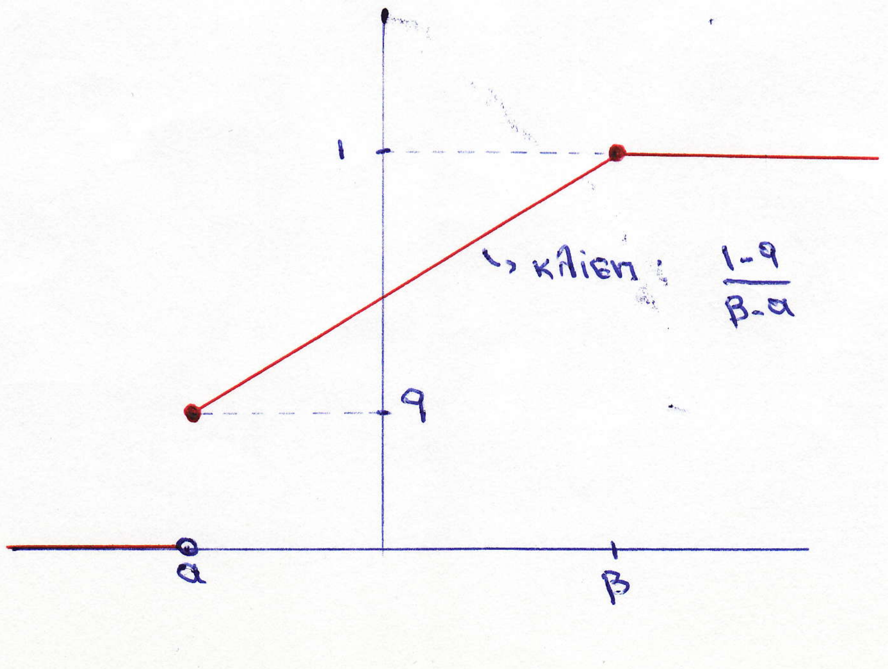
Όπως έχουμε πει, αναλόγως με τη μορφή που έχει το στήριγμα, διακρίνουμε τις κατανομές σε διακριτές και μη διακριτές. Συγκεκριμένα, μια κατανομή ονομάζεται διακριτή όταν έχει διακριτό στήριγμα (π.χ. $\{1,2,3,\dots\}$)

Στις μη διακριτές κατανομές περιλαμβάνονται οι συνεχείς και οι μικτές κατανομές. Μια κατανομή λέγεται συνεχής όταν το στήριγμά της είναι συνεχές (π.χ. $[0,1]$ ή $[0,1]\cup[2,3]$). Μια μικτή κατανομή είναι μίξη διακριτής και συνεχούς κατανομής, αποτελείται δηλαδή από ένα διακριτό και ένα συνεχές κομμάτι.

Βάσει των παραπάνω είναι δυνατόν να έχουμε <u>συνεχή</u> κατανομή P και <u>ασυνέχεια</u> στην αθροιστική συνάρτηση F.

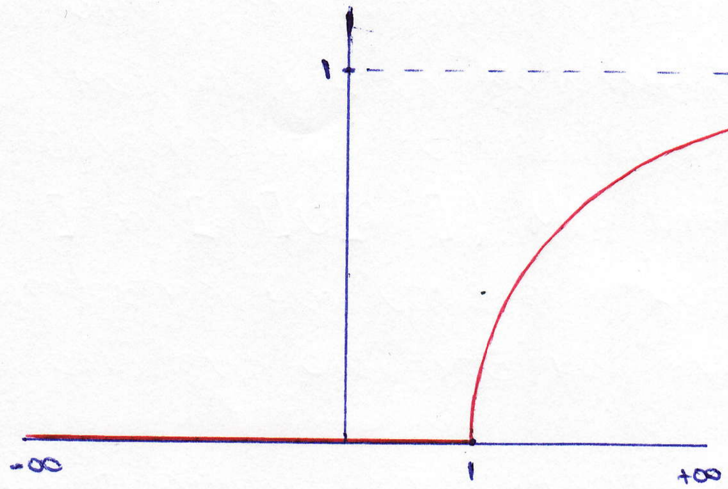
π.χ. 1 : $$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ q + (1-q)\dfrac{(x-a)}{\beta - a}, & a \leq x < \beta \\ 1, & x \geq \beta \end{cases}$$

παρατηρούμε ότι η F παρουσιάζει ασυνέχεια στο a, ωστόσο η P είναι συνεχής εφόσον $supp(P) = [a, \beta]$



π.χ. 2 : $F(x) = \begin{cases} 0, & x<1 \\ 1-\frac{1}{x} & x\geq 1 \end{cases}$

παρατηρούμε ότι η F είναι παντού συνεχής (μη παραγωγίσιμη στο 1), γνησίως αύξουσα εντός supp και σταθερή εκτός supp.



Άσκηση

Να εξετάσετε αν η F είναι αθροιστική συνάρτηση

$F(x) = \begin{cases} 0, & x<1 \\ 1-\frac{1}{2^{\lfloor x \rfloor}}, & x\geq 1 \end{cases}$. όπου $\lfloor x \rfloor = \max\{m\in\mathbb{N} : m\leq x\}$ και $\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$

Λύση

Ελέγχουμε αν ισχύουν οι τρεις ιδιότητες της αθροιστικής συνάρτησης F.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$

Πράγματι, $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$, αφού $F(x)=0$, $\forall x<1$

Επίσης, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left\{1-\frac{1}{2^{\lfloor x \rfloor}}\right\} = 1-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2^{\lfloor x \rfloor}} = 1-0 = 1$

2. μη φθίνουσα

Έστω $a, b \in \mathbb{R}$, με $a<b$. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις

- $a < b < 1$

  τότε $F(b) - F(a) = 0 - 0 = 0 \Rightarrow F(a) = F(b)$

- $a<1$ και $b \geq 1$

  τότε $F(b) - F(a) = 1 - \frac{1}{2^{\lfloor b \rfloor}} - 0 = 1 - \frac{1}{2^{\lfloor b \rfloor}} > 0 \Rightarrow F(a) < F(b)$

- $1 \leq a < b$

  τότε $F(b) - F(a) = \left\{1 - \frac{1}{2^{\lfloor b \rfloor}}\right\} - \left\{1 - \frac{1}{2^{\lfloor a \rfloor}}\right\} = \frac{1}{2^{\lfloor a \rfloor}} - \frac{1}{2^{\lfloor b \rfloor}} \geq 0$

  $\Rightarrow F(a) \leq F(b)$

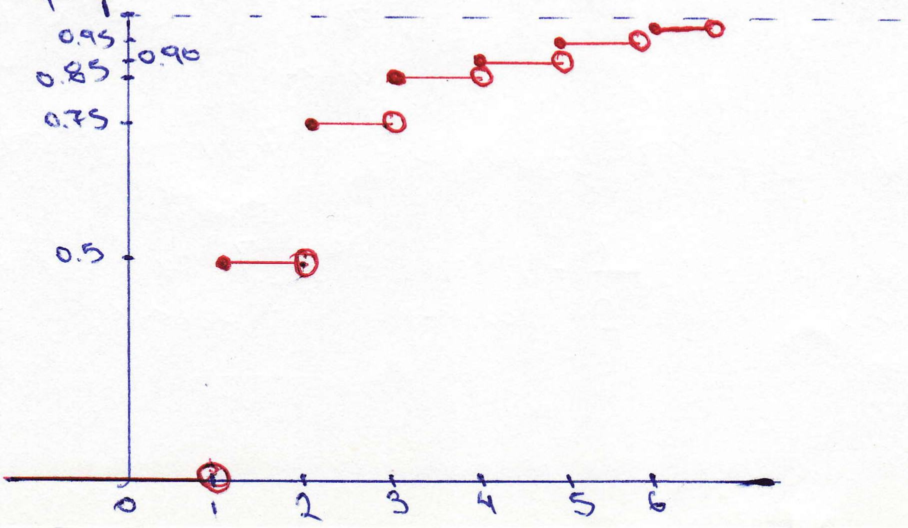
3. Από δεξιά συνεχής

Έστω $a \in \mathbb{R}$

- αν $a<1$ τότε $\lim_{x \to a^+} F(x) = F(a) = 0$
- αν $a \geq 1$ τότε $\lim_{x \to a^+} F(x) = \lim_{x \to a^+} \left(1 - \frac{1}{2^{\lfloor x \rfloor}}\right) = 1 - \frac{1}{2^{\lfloor a \rfloor}} = F(a)$

Συνεπώς, η F είναι συνεχής από δεξιά.

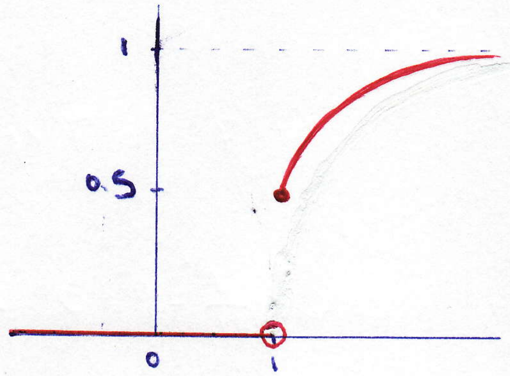
Εφόσον 1,2,3 ισχύουν, η F είναι αθροιστική συνάρτηση. Επίσης, έχει αριθμήσιμο πλήθος ασυνεχειών (το πλήθος των φυσικών)



Άσκηση

Να εξετάσετε αν η παρακάτω συνάρτηση είναι αθροιστική συνάρτηση

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1 - \frac{1}{2^x}, & x \geq 1 \end{cases}$$



$supp(P) = [1, +\infty)$

Λύση

Ελέγχουμε τις ιδιότητες της αθροιστικής συνάρτησης

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, αφού $F(x) = 0$, για $x < 1$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^x}\right) = 1 - 0 = 1$$

2. μη φθίνουσα

Έστω $a, b \in \mathbb{R}$, με $a < b$. Όπως και πριν, υπάρχουν τρεις περιπτώσεις

- $a < b < 1$

  τότε $F(b) - F(a) = 0 - 0 = 0 \Rightarrow F(a) = F(b)$
- $a < 1$ και $b \geq 1$

  τότε $F(b) - F(a) = 1 - \frac{1}{2^b} - 0 = 1 - \frac{1}{2^b} > 0 \Rightarrow F(a) < F(b)$
- $1 \leq a < b$

  τότε $F(b) - F(a) = \left(1 - \frac{1}{2^b}\right) - \left(1 - \frac{1}{2^a}\right) = \frac{1}{2^a} - \frac{1}{2^b} > 0$

Επομένως σε κάθε περίπτωση $F(b) - F(a) \geq 0$.

3. Από δεξιά συνεχής

- αν $a < 1$ τότε $\lim\limits_{x \to a^+} F(x) = 0 = F(a)$
- αν $a \geq 1$ τότε $\lim\limits_{x \to a^+} F(x) = \lim\limits_{x \to a^+} \left(1 - \frac{1}{2^x}\right) = 1 - \frac{1}{a} = F(a)$

Άρα η $F(x)$ είναι από δεξιά συνεχής

Άρα 1, 2, 3 ισχύουν και η F είναι πράγματι αθροιστική.

* Η P είναι <u>συνεχής</u> με <u>ασυνεχή</u> F

Άσκηση

Να εξετάσετε αν η F είναι αθροιστική συνάρτηση

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, & x \geq 0 \end{cases}$$

Δίνεται : $\int_{0}^{+\infty} e^{-k^2} dk = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, ολοκλήρωμα Gauss

Λύση

Ελέγχουμε τις ιδιότητες της αθροιστικής συνάρτησης

1. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, αφού $F(x)=0$ για $x<0$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

* παρατηρούμε ότι η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι άρτια. Δηλαδή, $f(x) = f(-x)$, αφού το z είναι στο τετράγωνο
* για να χρησιμοποιήσουμε το ολοκλήρωμα Gauss θα πρέπει να μετασχηματίσουμε τα όρια.

Αλλαγή μεταβλητής προς ολοκλήρωση

$p = -z \Rightarrow z = -p$

$dp = -dz \Rightarrow dz = -dp$

Νέα όρια

$p_1 = -(-\infty) = +\infty \Rightarrow$ κάτω όριο

$p_2 = -0 = 0 \Rightarrow$ πάνω όριο

αντιστρέφω με $(-)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(-p)^2} (-dp) \right] + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{p^2}{2}} dp + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια διαδικασία. Συνεπώς, μπορούμε να αλλάξουμε το όνομα της μεταβλητής προς ολοκλήρωση αφού οι προς ολοκλήρωση συναρτήσεις είναι ίδιες.

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2} dz$$

Αλλαγή Μεταβλητής προς ολοκλήρωση

$$\underbrace{k = \frac{z}{\sqrt{2}}} \Rightarrow z = \sqrt{2}\, k \quad \Big| \text{ Νέα όρια}$$

$$z_1 = 0$$

$$dk = \frac{1}{\sqrt{2}} dz \Rightarrow dz = \sqrt{2}\, dk \quad \Big| \; z_2 = +\infty$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-k^2} \sqrt{2}\, dk = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-k^2} dk = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$$

2. μη φθίνουσα

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$

- περίπτωση 1η: $x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow F(x_1) = F(x_2) = 0$
- περίπτωση 2η: $F(x_1) = 0$, $F(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$

$x_1 < 0$, $x_2 \geq 0$

$$\Rightarrow F(x_2) - F(x_1) > 0$$

- περίπτωση 3η: $F(x_2) - F(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

$0 \leq x_1 < x_2$

από ιδιότητες ολοκληρώματος Riemann γνωρίζουμε ότι

αν $x_1 < x_2$ $\quad \int_{-\infty}^{x_2} = \int_{-\infty}^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2}$

αντικαθιστούμε:

$$\Rightarrow F(x_2) - F(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz > 0 \Rightarrow F(x_2) > F(x_1)$$

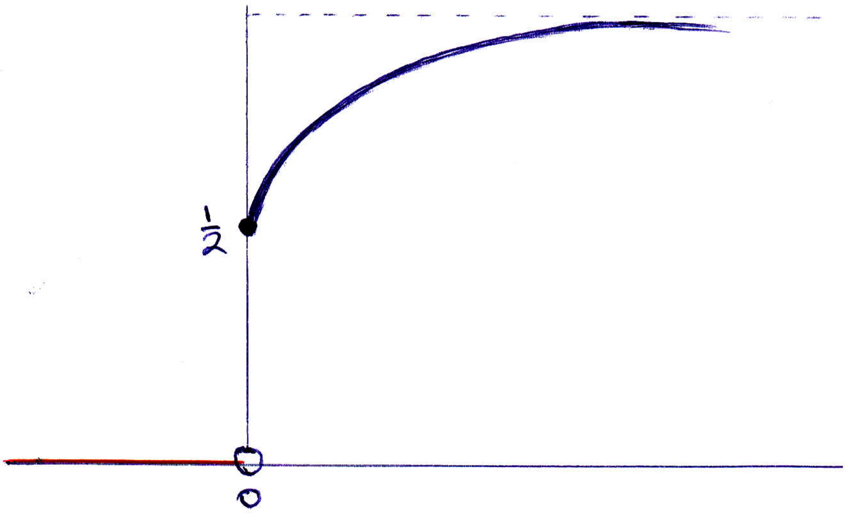
Συνεπώς, η F είναι μη φθίνουσα

3. Από δεξιά συνεχής

Έστω $a \in \mathbb{R}$

- $a < 0 \Rightarrow \lim_{x \to a^+} F(x) = F(a) = 0$
- $a \geq 0 \Rightarrow \lim_{x \to a^+} F(x) = \lim_{x \to a^+} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = F(a)$

Αφού ισχύουν οι παραπάνω ιδιότητες, η F είναι πράγματι αθροιστική συνάρτηση.



$$F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

αλλαγή μεταβλητής προς ολοκλήρωση

$$\left\{ \begin{array}{l|l} k = -\frac{z}{\sqrt{2}} \Rightarrow z = -k\sqrt{2} & \text{Νέα όρια} \\ & k_1 = -(-\infty) = +\infty \\ dk = -\frac{1}{\sqrt{2}} dz \Rightarrow dz = -dk\sqrt{2} & k_2 = -0 = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{0} -e^{-k^2} dk\sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{0} e^{-k^2} dk = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-k^2} dk = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2}$$