Υπολογισμός Πιθανοτήτων

Μπορούμε να υπολογίσουμε, χρησιμοποιώντας τις παραπάνω κατανομές, την πιθανότητα που αποδίδεται σε οποιοδήποτε διάστημα των πραγματικών ($\in \Sigma_{\mathbb{R}}$).

Παράδειγμα

Δίνεται η κατανομή Poisson. Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P((-2,-1)\cup(1,3/2))$

Απάντηση

Αρχικά βλέπουμε ότι το ενδεχόμενο $(-2,-1)\cup(1,3/2)\in\Sigma_{\mathbb{R}}$. Συνεπώς, έχει νόημα να υπολογίσουμε την πιθανότητα. Εναλλακτικά, αν η περιγραφή που μας έχει δοθεί δεν είναι πλήρης, δηλαδή δεν ικανοποιούνται τα κριτήρια 1. & 2. τότε δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την P.

$$P((-2,-1)\cup(1,3/2)) = P\left[((-2,-1)\cup(1,3/2))\cap \text{supp}\right] \quad \text{όπου } \text{supp}=\mathbb{N}=\{0,\dots\}$$

$$\Rightarrow P\left[((-2,-1)\cup(1,3/2))\cap\{0,1,2,\dots\}\right] = P(\varnothing)=0$$

Συνεπώς, η κατανομή Poisson αποδίδει μηδενική πιθανότητα σε αυτό το διάστημα.

Ποια είναι η πιθανότητα $P((-2,-1)\cup[1,3/2))$;

Απάντηση

$$P((-2,-1)\cup[1,3/2)) = P(((-2,-1)\cup[1,3/2))\cap\{0,1,\dots\}) = P(\{1\}) = \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} = \lambda\cdot e^{-\lambda}$$

Έστω ότι $\lambda=\frac{1}{2} \Rightarrow P(\{1\}) = \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}}$

Ποια είναι η πιθανότητα $P((-2,-1)\cup[1,3])$;

Απάντηση

$$P((-2,-1)\cup[1,3]) = P(((-2,-1)\cup[1,3])\cap\{0,1,\dots\}) = P(\{1,2,3\}) \overset{\text{ΑΡΙΘΜΗΜΕΝΗ ΠΡΟΣΘΕΤΙΚΟΤΗΤΑ}}{=}$$

$$= P(\{1\}\cup\{2\}\cup\{3\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) =$$

$$= \lambda\cdot e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2}\cdot e^{-\lambda} + \frac{\lambda^3}{6}\cdot e^{-\lambda} = \lambda\cdot e^{-\lambda}\left(1+\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda^2}{6}\right)$$

Ερώτηση

Πόσες κατανομές Poisson υπάρχουν;

Απάντηση

Μπορούν να υπάρξουν τόσες κατανομές Poisson όσες και οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει το λ στο διάστημα $(0,+\infty)$. Συνεπώς, το προηγούμενο παράδειγμα είναι μια οικογένεια κατανομών με παράμετρο λ.

Γενικότερα, στο στατιστικό πρόβλημα αν γνωρίζουμε σε ποια οικογένεια η εκάστοτε κατανομή (π.χ. Poisson), τότε πρέπει να βρούμε την παράμετρο της (π.χ. λ). Συνεπώς, το πρόβλημα εύρεσης της άγνωστης κατανομής ανάγεται σε πρόβλημα εύρεσης της άγνωστης παραμέτρου.

Κατανομές Πιθανότητας στους πραγματικούς

Αθροιστική Συνάρτηση

Υπάρχει δυσκολία περιγραφής των διακριτών κατανομών. Για τον λόγο αυτό χρειαζόμαστε έννοιες πιο "οικείες", προκειμένου να περιγράφουμε μία κατανομή (π.χ. συναρτήσεις $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Η πρώτη έννοια που συναντούμε είναι η Αθροιστική Συνάρτηση.

Ορισμός:

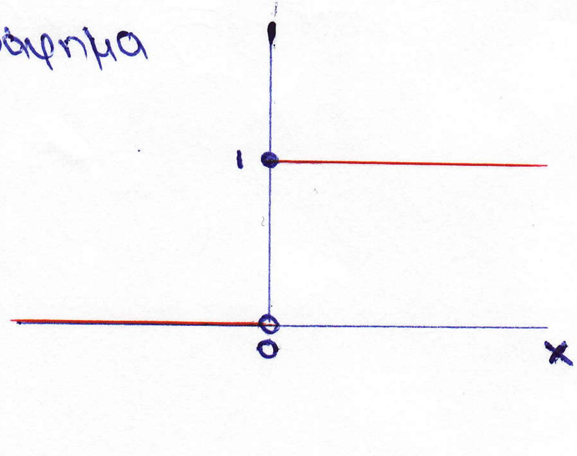
Έστω κατανομή P στο $\mathbb{R}$. Η αθροιστική συνάρτηση της κατανομής (cdf - cumulative distribution function) είναι η $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, που ορίζεται από: $F(x) = P((-\infty, x]) \; \forall \, x \in \mathbb{R}$.
Εφόσον $(-\infty, x] \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ τότε υπάρχει η $P((-\infty, x])$ και είναι καλώς ορισμένη, που σημαίνει ότι ορίζεται για οποιαδήποτε κατανομή πιθανότητας και την αναπαριστά πλήρως.

π.χ. Εκφυλισμένη κατανομή στο 0, $P(\{0\}) = 1$, $\text{supp}(P) = \{0\}$

Έχουμε ότι $F(x) = P((-\infty, x]) = P((-\infty, x] \cap \{0\})$

$$= \begin{cases} P(\emptyset), & \text{αν } x < 0 \\ P(\{0\}), & \text{αν } x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Γράφημα



π.χ. $Ber(q)$, $supp(Ber) = \{0,1\}$, $P(\{0\}) = 1-q$, $P(\{1\}) = q$

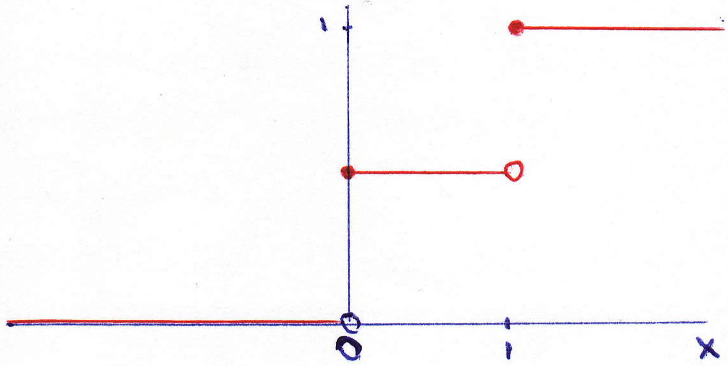
$$F(x) = P((-\infty, x]) = P((-\infty, x] \cap supp) = P((-\infty, x] \cap \{0,1\})$$

$$= \begin{cases} P(\emptyset), & x<0 \\ P(\{0\}), & 0 \le x < 1 \\ P(\{0,1\}), & x \ge 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-q, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

Ιδιότητες

- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\forall\ x<0$
- $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$, $\forall\ x \ge 1$
- μη φθίνουσα

Γράφημα



Παρατηρούμε ότι και στα δύο παραδείγματα οι cdf είναι αύξουσες, ασυνεχείς σε σημεία, αλλά είναι παντού από δεξιά συνεχείς.

Θεώρημα:

Η F έχει τις εξής τρεις ιδιότητες

1. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
2. Η F είναι αύξουσα, δηλαδή αν $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$
3. Η F είναι από δεξιά συνεχής, δηλ. $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $\lim_{y \to x^+} F(y) = F(x)$

Αντίστροφα, αν κάποια $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις 1. 2. 3. τότε είναι η cdf μοναδικής κατανομής P στο $\mathbb{R}$.

Το παραπάνω είναι θεώρημα αναπαράστασης, αφού, δεδομένου ότι σε κάθε P αντιστοιχεί μοναδική F, αυτό μας λέει ότι ισχύει και το αντίστροφο. Αυτό σημαίνει ότι η F αναπαριστά "τέλεια" την P, οπότε μπορούμε να ορίζουμε την P μέσω της F, να βρούμε τις πιθανότητες που αυτή αποδίδει κ.α.

Άσκηση

Poisson από Μεταφορά

Έστω η κατανομή $\mathbb{P}$ με $supp\mathbb{P} = \{0, 1, 2, \dots\}$ και $\mathbb{P}(\{x\}) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$ για $\forall x \in supp\mathbb{P}$, όπου $\lambda \in (0, +\infty)$. Έστω η τυχαία μεταβλητή $X_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ όπου $X_1(x) = -x$

1. Να βρεθεί το στήριγμα της $\mathbb{P}^*$ από μεταφορά

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της κατανομής από μεταφορά έχουμε ότι:

$$\mathbb{P}^*(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) \quad \forall A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}^*(\{-x\}) = \mathbb{P}(X_1^{-1}(-x)) = \mathbb{P}(\{x\}) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} > 0$$

(από ορισμό αντίστροφης εικόνας)

Συνεπώς, σε κάθε στοιχείο του συνόλου $\{\dots -2, -1, 0\}$ αποδίδεται αυστηρά θετική πιθανότητα:

$$\mathbb{P}^*(\{\dots, -2, -1, 0\}) = \mathbb{P}(X_1^{-1}(\{\dots, -2, -1, 0\})) =$$

$$\underbrace{\mathbb{P}(\{0, 1, 2, \dots\})}_{supp\mathbb{P} \text{ από εκφώνηση}} = \mathbb{P}(supp\mathbb{P}) = 1$$

(από ιδιότητα κατανομής πιθανότητας)

Εφόσον $\mathbb{P}^*(\{\dots, -2, -1, 0\}) = 1$ τότε $supp\mathbb{P}^* = \{\dots, -2, -1, 0\}$

2. Να βρεθεί η $\mathbb{P}^*$

Εφόσον $supp\mathbb{P}^* = \{\dots, -2, -1, 0\}$ τότε η $\mathbb{P}^*(\{x\}) = \frac{\lambda^{|x|}}{|x|!} \cdot e^{-\lambda}$

3. Να βρεθεί η αθροιστική συνάρτηση της κατανομής $\mathbb{P}^*$

Η αθροιστική συνάρτηση της $\mathbb{P}^*$ θα ορίζεται ως

$$F_{X_1}(x) = \mathbb{P}^*((-\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R}$$

όπου $\mathbb{P}^*((-\infty,x]) = \mathbb{P}^*((-\infty,x] \cap \operatorname{supp} \mathbb{P}^*)$

διακρίνουμε της εξής περιπτώσεις

- $x \geq 0 \Rightarrow F_{X_1}(x) = \mathbb{P}^*((-\infty,x] \cap \operatorname{supp}\mathbb{P}^*) = \mathbb{P}^*(\operatorname{supp}\mathbb{P}^*) = 1$
- $-1 \leq x < 0 \Rightarrow F_{X_1}(x) = \mathbb{P}^*((-\infty,x] \cap \operatorname{supp}\mathbb{P}^*)$

$$= \mathbb{P}^*(\operatorname{supp}\mathbb{P}^* - \{0\}) = 1 - \mathbb{P}^*(\{0\})$$

- $-2 \leq x < -1 \Rightarrow F_{X_1}(x) = \mathbb{P}^*((-\infty,x] \cap \operatorname{supp}\mathbb{P}^*)$

$$= \mathbb{P}^*(\operatorname{supp}\mathbb{P}^* - \{0\} - \{-1\})$$

$\vdots$

$$= 1 - \mathbb{P}^*(\{0\}) - \mathbb{P}^*(\{-1\})$$

Επομένως, $F_{X_1}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 1 - \sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} \mathbb{P}^*(\{-i\}), & x < 0 \end{cases}$

όπου $\lfloor x \rfloor$ ο μεγαλύτερος αρνητικός ακέραιος (ή μηδέν) μικρότερος ή ίσος του x

π.χ. $x = -2.75$, $\lfloor x \rfloor = \lfloor -2.75 \rfloor = -3$

Άσκηση

Εστω η κατανομή $\mathbb{P}$ με $supp\mathbb{P} = \{0,1,2,\dots\}$ και $\mathbb{P}(\{x\}) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$ για $\forall x \in supp$, όπου $\lambda \in (0,+\infty)$. Εστω η τυχαία μεταβλητή $X_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ όπου $X_2(x) = x^2$

1. Να βρεθεί το στήριγμα της $\mathbb{P}^*$ από μεταφορά

$\forall x \in supp$ ισχύει $X_2(x) = x^2$. Σύμφωνα με τον ορισμό της αντίστροφης εικόνας (βλ. φροντιστήριο 2) θα έχουμε

$$X_2^{-1}(x^2) = \pm x$$

Για παράδειγμα υπολογίζουμε $\forall x \in supp\mathbb{P}$:

$X_2(0) = 0 \Rightarrow X_2^{-1}(0) = 0$		παρατηρούμε ότι οι αντίστροφες
$X_2(1) = 1^2 \Rightarrow X_2^{-1}(1^2) = \pm 1$		εικόνες των $\{0,1^2,2^2,\dots\}$ σχημα-
$X_2(2) = 2^2 \Rightarrow X_2^{-1}(2^2) = \pm 2$		τίζουν τα σύνολα
$X_2(3) = 3^2 \Rightarrow X_2^{-1}(3^2) = \pm 3$		$\{0,1,2,\dots\}$ κ' $\{\dots,-2,-1,0\}$

Επειδή $supp\mathbb{P} = \{0,1,2,\dots\}$ κρατάμε τις αντίστροφες εικόνες με το θετικό πρόσημο.

Από ορισμό τυχαίας μεταβλητής έχουμε $\mathbb{P}^*(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$ $\forall A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}^*(\{x^2\}) = \mathbb{P}(X_2^{-1}(\{x^2\})) = \mathbb{P}(\{x\}) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} > 0$$

↳ που σημαίνει ότι η $\mathbb{P}^*$ αποδίδει αυστηρά θετική πιθανότητα σε κάθε σημείο του supp

$$\mathbb{P}^*(\{0,1,4,\ldots\}) = \mathbb{P}(X_2^{-1}(\{0,1^2,2^2,\ldots\}))$$

$$= \mathbb{P}(\{0,1,2,\ldots\})$$

$$= \mathbb{P}(\operatorname{supp}\mathbb{P})$$

$$= 1$$

Συνεπώς, το στήριγμα της κατανομής από μεταφορά θα είναι :

$$\operatorname{supp}\mathbb{P}^* = \{0,1^2,2^2,\ldots\}$$

2. Να βρεθεί η $\mathbb{P}^*$

$$\mathbb{P}^*(x) = \frac{\lambda^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}!} e^{-\lambda}, \quad \forall x \in \operatorname{supp}\mathbb{P}^*$$

3. Να βρεθεί η αθροιστική συνάρτηση της $\mathbb{P}^*$

$$F_{X_2}(x) = \mathbb{P}^*((-\infty,x]), \quad x \in \mathbb{R}$$

όπου $\mathbb{P}^*((-\infty,x]) = \mathbb{P}^*((-\infty,x] \cap \operatorname{supp}\mathbb{P}^*)$

$$= \mathbb{P}^*((-\infty,x] \cap \{0,1^2,2^2,\ldots\})$$

$x < 0 \quad = \quad \mathbb{P}^*(\emptyset) = 0$

$0 \leq x < 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}^*(\{0\})$

$1 \leq x < 4 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}^*(\{0,1\}) = \mathbb{P}^*(\{0\}) + \mathbb{P}^*(\{1\})$

$4 \leq x < 9 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}^*(\{0,1,4\}) = \mathbb{P}^*(\{0\}) + \mathbb{P}^*(\{1\}) + \mathbb{P}^*(\{4\})$

Άρα η $F_{X_2}(x) = \begin{cases} \mathbb{P}^*(\emptyset), & x < 0 \\ \sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} \mathbb{P}^*(\{i^2\}), & x \geq 0 \end{cases}$