$\underline{\Omega}$: Δειγματικός Χώρος ή Σύνολο Αναφοράς

π.χ. $\underline{\Omega} = \{a\}$

ή $\underline{\Omega} = \{a, \beta\}$

ή $\underline{\Omega} = \mathbb{R}$

$\Sigma_{\underline{\Omega}}$: Συλλογή Μετρήσιμων Υποσυνόλων ή
ή $P_{\underline{\Omega}}$ Δυναμοσύνολο του $\underline{\Omega}$

π.χ. $\underline{\Omega} = \{a\}$, $P_{\underline{\Omega}} = \{\emptyset, \underline{\Omega}\}$

$\underline{\Omega} = \{a, \beta\}$, $P_{\underline{\Omega}} = \{\emptyset, \underline{\Omega}, a, \beta\}$

$P_{\underline{\Omega}}$ (ή $\Sigma_{\underline{\Omega}}$) $= 2^{\underline{\Omega}}$

Ορισμός : Πραγματική Συνάρτηση επί του $\underline{\Omega}$ θα είναι
όποια συνάρτηση έχει ως πεδίο ορισμού το $P(\underline{\Omega})$ (ή $\Sigma_{\underline{\Omega}}$)
και πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$: $P : \Sigma_{\underline{\Omega}} \rightarrow \mathbb{R}$

π.χ. $\underline{\Omega} = \{a, \beta\}$, $P_{\underline{\Omega}}$ (ή $\Sigma_{\underline{\Omega}}$) $= \{\emptyset, \underline{\Omega}, \{a\}, \{\beta\}\}$

έστω $Q(\emptyset) = 0$

$Q(\underline{\Omega}) = 1$

$Q(\{a\}) = Q(\{\beta\}) = 1/2$

προσοχή! $f : \underline{\Omega} \Rightarrow R$ έχει Π.Ο. το $\underline{\Omega}$

$Q : \Sigma_{\underline{\Omega}} \rightarrow \mathbb{R}$ —"— —"— το $\Sigma_{\underline{\Omega}}$

Ορισμός : Κατανομή πιθανότητας (ή Μέτρο πιθανότητας)
(Probability distribution (or Probability Measure)
κατανομή πιθανότητας επί του $\underline{\Omega}$ θα ονομάζεται
οποιαδήποτε πραγματική συνολοσυνάρτηση ορισμένη στο $\Sigma_{\underline{\Omega}}$
$P : \Sigma_{\underline{\Omega}} \rightarrow [0,1]$ εφόσον ικανοποιεί τις ιδιότητες :

α. $\forall A \in \Sigma_\Omega$, $\mathbb{P}(A) \geq 0$

β. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

γ. Αν $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \Sigma_\Omega$ όπου $A_i \cap A_j = \emptyset$ όταν $i \neq j$

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \ldots + \mathbb{P}(A_n)$$

π.χ. $\Omega = \{\alpha, \beta\}$, $\Sigma_\Omega = \{\{\alpha\}, \{\beta\}, \emptyset, \Omega\}$

$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

$\mathbb{P}(\Omega) = 1$

$\mathbb{P}(\{\alpha\}) = \mathbb{P}(\{\beta\}) = 1/2$

Ικανοποιούνται και οι τρεις ιδιότητες, άρα είναι μια κατανομή πιθανότητας επί του συγκεκριμένου Ω.

Ορισμός: Έστω το Ω σύνολο αναφοράς και $\mathbb{P}$ κατανομή πιθανότητας επί του Ω.
Το $A \in \Sigma_\Omega$ θα ονομάζεται σύνολο πλήρους πιθανότητας ως προς την $\mathbb{P}$ αν $\mathbb{P}(A) = 1$.
Δυικά το A θα ονομάζεται αμελητέο ως προς την $\mathbb{P}$ αν $\mathbb{P}(A) = 0$

! Στο κενό οποιαδήποτε κατανομή πιθανότητας αποδίδει μηδενική πιθανότητα

Δειγματικοί Χώροι

Μπορούμε να θεωρούμε πάντα το δυναμοσύνολο του Ω ως τον σχετικό χώρο ενδεχομένων; Η απάντηση εξαρτάται από τη φύση του δειγματικού χώρου. Υπάρχουν τρία είδη δ.χ.

i. πεπερασμένος : περιέχει πεπερασμένο αριθμό στοιχείων
ii. διακριτός : -"- αριθμήσιμα άπειρα στοιχεία
iii. υπεραριθμήσιμος: -"- υπεραριθμήσιμο αριθμό στοιχείων

Αν ισχύουν οι i. ή ii τότε μπορούμε πάντα να θεωρούμε το δυναμοσύνολο του Ω ως τον κατάλληλο χώρο ενδεχομένων. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να προσάψουμε πιθανότητα σε κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου.

Στην iii το δυναμοσύνολο του Ω δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως χώρος ενδεχομένων διότι δεν μπορεί να υπάρξει συνάρτηση πιθανότητας η οποία να ικανοποιεί τη συνθήκη της αριθμήσιμης προσθετικότητας.

Δειγματικοί Χώροι

Η τελευταία παρατήρηση δημιουργεί το ερώτημα 'γιατί να μην θεωρούμε πάντα το δυναμοσύνολο του δειγματικού χώρου ως τον σχετικό χώρο ενδεχομένων;'

Η απάντηση εξαρτάται από τη φύση του δειγματικού χώρου. Υπάρχουν τρία είδη δειγματικών χώρων.

i. Πεπερασμένος δειγματικός χώρος : περιέχει πεπερασμένο αριθμό στοιχείων

ii. Διακριτός δειγματικός χώρος : περιέχει αριθμήσιμα άπειρα στοιχεία

iii. Υπεραριθμήσιμος δειγματικός χώρος : περιέχει υπεραριθμήσιμο αριθμό στοιχείων

Αν ισχύουν οι περιπτώσεις i. ή ii τότε μπορούμε πάντα να θεωρούμε το δυναμοσύνολο του Ω ως τον κατάλληλο χώρο ενδεχομένων, δηλαδή $\mathbb{P}(\Omega) = \mathcal{F}$. Πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να προσάψουμε πιθανότητα σε καθένα από τα υποσύνολα του δειγματικού χώρου.

Στην περίπτωση iii. το δυναμοσύνολο του Ω δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως χώρος ενδεχομένων, διότι δεν μπορεί να υπάρξει συνάρτηση πιθανότητας η οποία να ικανοποιεί τη συνθήκη της αριθμήσιμης προσθετικότητας.

Επιπλέον

Παραδείγματα Κατανομών Πιθανότητας

1. $\underline{\Omega} = \{K\}$, $\Sigma_{\underline{\Omega}} = \{\underline{\Omega}, \emptyset\}$, $P(\{K\}) = P(\underline{\Omega}) = 1$

μονοσύνολο

υπάρχει αναγκαστικά μοναδική κατανομή πιθανότητας και την ξέρουμε. Ονομάζεται εκφυλισμένη κατανομή πιθανότητας στο K και ορίζεται ως $P(\{K\}) = 1$

2. $\underline{\Omega} = \{K, \Gamma\}$, $\Sigma_{\underline{\Omega}} = \{\emptyset, \{K\}, \{\Gamma\}, \underline{\Omega}\}$

Έστω $q \in [0, 1]$ και $P_q : \Sigma_{\underline{\Omega}} \to [0, 1]$ που ορίζεται ως

$P_q(\emptyset) = 0$, $P_q(\{K\}) = q$, $P_q(\{\Gamma\}) = 1 - q$, $P_q(\underline{\Omega}) = 1$

Όλες οι κατανομές με 2 στοιχεία στο $\underline{\Omega}$ έχουν την παραπάνω μορφή. Για παράδειγμα, αν $q = \frac{1}{2}$ έχουμε το πείραμα τύχης του αμερόληπτου κέρματος. Υπάρχουν τόσες κατανομές πιθανότητας σε αυτό το $\underline{\Omega}$, όσα και τα $q \in [0, 1]$. Στο ένα στοιχείο αποδίδεται μια πιθανότητα και στο άλλο η συμπληρωματική του.

Για $q = 1 \Rightarrow$ εκφυλισμένη στο K, αφού $P(\{K\}) = 1$

Για $q = 0 \Rightarrow$ — " — στο Γ, αφού $P(\{\Gamma\}) = 1$

3. $\underline{\Omega} = \mathbb{R}$.

Το $\Sigma_{\mathbb{R}}$ δεν μπορεί να περιγραφεί με ακρίβεια. Συνεπώς, υπάρχει δυσκολία περιγραφής όποιας κατανομής πιθανότητας στο $\mathbb{R}$, επειδή είναι δύσκολο να περιγράψουμε το Π.Ο. της. (χρησιμοποιούμε άλλες έννοιες).