Φροντιστήριο 8ο,   20/05/2019

Άσκηση 5

Έστω $X \sim Weibull(a,b)$, όπου $a,b>0$. Να βρείτε την ροπή k-τάξης και να δείξετε ότι $Var(X) = \dfrac{\Gamma(1+2a^{-1}) - \Gamma(1+a^{-1})^2}{b^2}$

Δίνονται:

· pdf της κατανομής: $f(x;a,b) = \begin{cases} a \cdot b^a x^{a-1} \cdot e^{-(bx)^a} , & x>0 \\ 0 , & x \leq 0 \end{cases}$

· συνάρτηση Γάμμα: $\int_0^{+\infty} t^{a-1} \cdot e^{-t} dt = \Gamma(a) = (a-1)!$

Λύση

$$E(X^k) = \int_{supp} x^k \cdot f(x;a,b) dx = \int_0^{+\infty} x^k \left[a \cdot b^a \cdot x^{a-1} \cdot e^{-(bx)^a}\right] dx \xlongequal[b^k]{\text{πολ/με διαιρούμε}}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{b^k}{b^k} \cdot x^k \left[a \cdot b^a \cdot x^{a-1} \cdot e^{-(bx)^a}\right] dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{b^k} \cdot (bx)^k \cdot a \cdot b^a \cdot x^{a-1} \cdot e^{-(bx)^a} \cdot dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{b^k} \left\{\left[(bx)^a\right]^{\frac{1}{a}}\right\}^k \cdot a \cdot b^a \cdot x^{a-1} \cdot e^{-(bx)^a} dx \xlongequal[dt = ab^a x^{a-1} dx]{\text{θέτω } t=(bx)^a}$$

$$\Rightarrow dx = \frac{1}{ab^a x^{a-1}} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{b^k} \left[(t)^{\frac{1}{a}}\right]^k \cdot \cancel{a \cdot b^a \cdot x^{a-1}} \cdot e^{-t} \cdot \frac{1}{\cancel{ab^a x^{a-1}}} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{b^k} \cdot t^{\frac{k}{a}} \cdot e^{-t} dt = \frac{1}{b^k} \underbrace{\int_0^{+\infty} t^{\frac{k}{a}} \cdot e^{-t} dt}_{\substack{\text{κατόπιν υπόδειξης} \\ \Gamma\left(\frac{k}{a}+1\right)}} = \frac{1}{b^k} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{a}+1\right)$$

Ροπή $1^{ης}$ τάξης: $k=1 \Rightarrow E(X) = \dfrac{1}{b} \cdot \Gamma\left(\dfrac{a+1}{a}\right) = \dfrac{1}{b}\Gamma\left(1+\dfrac{1}{a}\right)$

Ροπή $2^{ης}$ τάξης: $k=2 \Rightarrow E(X^2) = \dfrac{1}{b^2} \cdot \Gamma\left(1+\dfrac{2}{a}\right)$

Διακύμανση: $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \dfrac{1}{b^2}\Gamma\left(1+\dfrac{2}{a}\right) - \left(\dfrac{1}{b}\Gamma\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\right)^2$

Ροπογεννήτριες

Η ροπογεννήτρια είναι συνάρτηση που χρησιμεύει στον υπολογισμό όλων των ροπών k-τάξης, μ_k, $k=1,2,\dots$, μιας τυχαίας μεταβλητής X.

Ορισμός

Η ροπογεννήτρια (moment generating function) $M_X(t)$ μιας τυχαίας μεταβλητής X, είναι η πραγματική συνάρτηση με τύπο $M_X(t) = E(e^{tX})$, για κάθε t που ανήκει σε διάστημα της μορφής $(-\delta,\delta)$, $\delta>0$.

Αν η τυχαία μεταβλητή X είναι διακριτή με συνάρτηση πιθανότητας $P(X=x)$, η ροπογεννήτρια της X θα δίνεται από:

$$M_X(t) = \sum_{x\in supp} e^{tx}\cdot P(X=x), \quad |t|<\delta$$

Αν η τυχαία μεταβλητή X είναι συνεχής με συνάρτηση πυκνότητας $f_X(x)$, η ροπογεννήτρια της X θα δίνεται από:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}\cdot f_X(x)\,dx, \quad |t|<\delta$$

Παρατηρούμε ότι η ροπογεννήτρια δεν ορίζεται για κάθε $t\in\mathbb{R}$. Περιοριζόμαστε σε εκείνες τις τιμές του t για τις οποίες υπάρχει σύγκλιση.

Σημείωση: η ποσότητα $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f_X(x)$.

Ροπές και Ροπογεννήτρια (Βλ. Θεώρημα 1&2 στις Σημειώσεις)

Για την P υπάρχουν οι ροπές κάθε τάξης και χαρακτηρίζουν την P ανν η M είναι καλώς ορισμένη. Σε αυτή και μόνο την περίπτωση έχουμε $E(X^k) = M^{(k)}(0)$, $\forall k\in\mathbb{N}$.

Πρόταση (χωρίς απόδειξη)

Η ροπογεννήτρια μιας τυχαίας μεταβλητής χαρακτηρίζει μονοσήμαντα την κατανομή της. Αν X, Y είναι δύο τυχαίες μεταβλητές με ροπογεννήτριες $M_X(t)$ και $M_Y(t)$, αντίστοιχα, και αν για κάποιο $\delta>0$, ισχύει ότι $M_X(t) = M_Y(t)$ $\forall t\in(-\delta,\delta)$, τότε οι τυχαίες μεταβλητές X, Y έχουν την ίδια κατανομή.

Παράδειγμα 1

Η ροπογεννήτρια της διακριτής τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από $M_X(t) = \exp(e^t - 1)$. Να υπολογιστεί η μέση τιμή και η διακύμανση της X.

Λύση

$M'_X(t) = e^t \cdot e^{e^t - 1}$, $M''_X(t) = e^t \cdot e^{e^t-1} + e^t \cdot e^{e^t-1} \cdot e^t = e^t \cdot e^{e^t-1}(1+e^t)$

Οι παραπάνω παράγωγοι υπολογισμένες στο $t=0$ μας δίνουν τις ροπές $1^{ης}$ και $2^{ης}$ τάξης αντίστοιχα.

$E(X) = M'_X(0) = e^0 \cdot e^{e^0-1} = 1 \cdot 1^{1-1} = 1$: ροπή $1^{ης}$ τάξης

$E(X^2) = M''_X(0) = e^0 \cdot e^{e^0-1}(1+e^0) = 1(1+1) = 2$: ροπή $2^{ης}$ τάξης

Διακύμανση: $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 2 - 1^2 = 1$

Παράδειγμα 2

Έστω X τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας $P(X=x) = c^x$, $x = 1, 2, \ldots$ και $c \in \mathbb{R}$.

α. Να εξαχθεί η ροπογεννήτρια $M_X(t)$ της X. Πότε είναι καλώς ορισμένη

β. Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c.

γ. Να υπολογιστούν η μέση τιμή και η διακύμανση της X.

Λύση

α. $M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} \cdot P(X=x) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} c^x = \sum_{x=1}^{\infty} (c \cdot e^t)^x =$

όπου $X = x$

και $\sum_{x=1}^{\infty} (c \cdot e^t)^x = (ce^t)^1 + (ce^t)^2 + \ldots + = \lim_{v \to +\infty} S_v$: άπειρο άθροισμα γεωμετρικής περιόδου

$S_v = c \cdot e^t \cdot \frac{(ce^t)^v - 1}{c \cdot e^t - 1}$, $\lim_{v \to \infty} c \cdot e^t \left\{ \frac{(ce^t)^v - 1}{ce^t - 1} \right\} = \frac{ce^t}{ce^t - 1} \cdot \lim_{v \to \infty} [(ce^t)^v - 1]$

$= \frac{c \cdot e^t}{ce^t - 1}(0 - 1)$

$= \frac{ce^t}{1 - ce^t}$

Προκειμένου η ροπογεννήτρια να είναι καλώς ορισμένη θα πρέπει:

$\Rightarrow M_X(t) = \sum_{x=1}^{\infty} (c \cdot e^t)^x = \frac{c \cdot e^t}{1 - ce^t}$

β. Από Θεωρία γνωρίζουμε ότι $M_X(0)=1$

Στη ροπογεννήτρια που υπολογίσαμε στο ερώτημα α. βάζουμε $t=0$.

$$M_X(0)=1 \Leftrightarrow \frac{c\cdot e^0}{1-ce^0}=1 \Leftrightarrow \frac{c}{1-c}=1 \Leftrightarrow c=1-c \Rightarrow c=\frac{1}{2}$$

Συνεπώς, $M_X(t)=\dfrac{e^t}{2-e^t}$, $t<\ln 2$

γ. $$M'_X(t)=\frac{e^t(2-e^t)-(-e^t)\cdot e^t}{(2-e^t)^2}=\frac{2e^t-e^{2t}+e^{2t}}{(2-e^t)^2}=\frac{2e^t}{(2-e^t)^2}$$

$$M''_X(t)=\frac{2e^t(2-e^t)^2-2(2-e^t)(-e^t)2e^t}{(2-e^t)^4}$$

$$=\frac{2e^t(4+e^{2t}-4e^t)+4(2-e^t)e^te^t}{(2-e^t)^4}$$

$$=\frac{8e^t+2e^{3t}-8e^{2t}+4\cdot e^{2t}(2-e^t)}{(2-e^t)^4}$$

$$=\frac{8\cdot e^t+2e^{3t}-8e^{2t}+8e^{2t}-4e^{3t}}{(2-e^t)^4}$$

$$=\frac{8e^t-2e^{3t}}{(2-e^t)^4}$$

$M'_X(0)=\dfrac{2\cdot e^0}{(2-e^0)^2}=\dfrac{2}{(2-1)^2}=2$: ροπή 1ης τάξης : $E(X)$

$M''_X(0)=\dfrac{8\cdot e^0-2\cdot e^0}{(2-e^0)^4}=\dfrac{8-2}{(2-1)^4}=\dfrac{6}{1}=6$: ροπή 2ης τάξης : $E(X^2)$

$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2=6-2^2=2$: διακύμανση

Παράδειγμα 3

Έστω $X \sim Gamma(a,b)$, όπου $a,b>0$. Να υπολογιστεί η ροπογεννήτρια της X και οι ροπές 1ης, 2ης, 3ης, 4ης τάξης. Νδο. η $M(t)$ είναι καλώς ορισμένη.

Δίνονται : pdf Gamma : $f(x;a,b) = \begin{cases} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \cdot x^{a-1} \cdot e^{-bx}, & x \geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$

συνάρτηση Gamma : $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} \cdot e^{-t} dt \underset{a\in\mathbb{N}}{\overset{ανν}{=}} (a-1)!$

Λύση

παρατηρούμε ότι η κατανομή είναι συνεχής

$$M(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot f(x;a,b)\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{tx} \cdot 0\,dx + \int_0^{+\infty} e^{tx} \cdot \frac{b^a}{\Gamma(a)} \cdot x^{a-1} \cdot e^{-bx} dx$$

$$= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{tx} \cdot x^{a-1} \cdot e^{-bx} dx = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \cdot \int_0^{+\infty} x^{a-1} \cdot e^{-(b-t)x} dx =$$

Ας παρατηρήσουμε τον όρο $e^{-(b-t)x}$. Αν $t>b$ τότε $b-t<0 \Rightarrow -(b-t)x>0$ $\quad e^{-(b-t)x} = +\infty$.
Συνεπώς, η $M(t)$ δεν είναι καλώς ορισμένη.
Θα πρέπει ουσιαστικά $t \in (-\infty, b) \Rightarrow M(t) \in \mathbb{R}$
Προκειμένου το κέντρο του διαστήματος να είναι το 0, θα πρέπει $t\in(-b,b)$. Άρα,
$M(t) \in \mathbb{R}$ ανν $t \in (-b,b)$.

Θέτουμε $u = (b-t)x \Rightarrow du = (b-t)dx \Rightarrow dx = \frac{1}{b-t} du$

Αρχικά όρια: $x_1 = 0 \Rightarrow u_1 = (b-t)x_1 = 0$: Νέα
$x_2 = +\infty \Rightarrow u_2 = (b-t)x_2 = +\infty$ όρια

$$= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{-u} \cdot \frac{1}{b-t} \left(\frac{u}{b-t}\right)^{a-1} \cdot du = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \cdot \frac{1}{\cancel{(b-t)}} \cdot \frac{1}{(b-t)^{a-1}} \int_0^{+\infty} e^{-u} \cdot u^{a-1} \cdot du$$

$$= \frac{b^a}{(b-t)^a} \cdot \frac{1}{\Gamma(a)} \cdot \Gamma(a) = \frac{b^a}{(b-t)^a}$$

Υπολογισμός Ροπών

Ροπή 1ης τάξης: 1η παράγωγος $M(t)$ υπολογισμένη στο 0.

$$M'(t) = \frac{0\cdot(b-t)^a - a(b-t)^{a-1}\cdot(-1)\cdot b^a}{(b-t)^{2a}} = \frac{a\cdot b^a}{(b-t)^{a+1}}$$

$$t=0 \Rightarrow M'(0) = E(X) = \frac{a}{b}$$

Ροπή 2ης τάξης: 2η παράγωγος $M(t)$ υπολογισμένη στο 0.

$$M''(t) = \frac{-(a+1)(b-t)^a(-1)ab^a}{(b-t)^{2a+2}} = \frac{(a+1)ab^a}{(b-t)^{a+2}}$$

$$t=0 \Rightarrow M''(0) = \frac{(a+1)ab^a}{b^{a+2}} = \frac{a(a+1)}{b^2}$$

Ροπή 3ης τάξης: 3η παράγωγος της $M(t)$ υπολογισμένη στο 0.

$$M'''(t) = \frac{0\cdot(b-t)^{a+2} - (a+2)(b-t)^{a+1}\cdot(-1)(a+1)(ab^a)}{(b-t)^{2a+4}} =$$

$$= \frac{(a+2)(b-t)^{a+1}(a+1)ab^a}{(b-t)^{2a+4}} = \frac{(a+1)(a+2)ab^a}{(b-t)^{a+3}}$$

$$M'''(0) = \frac{(a+1)(a+2)a}{b^3}$$

Ροπή 4ης τάξης: 4ης παράγωγος της $M(t)$ υπολογισμένη στο 0.

$$M''''(t) = \frac{0\cdot(b-t)^{a+3} - (a+3)(b-t)^{a+2}(-1)(a+1)(a+2)ab^a}{(b-t)^{2a+6}} =$$

$$= \frac{(a+1)(a+2)(a+3)ab^a(b-t)^{a+2}}{(b-t)^{2a+6}} = \frac{(a+1)(a+2)(a+3)ab^a}{(b-t)^{a+4}}$$

$$M''''(0) = \frac{(a+1)(a+2)(a+3)a}{b^4}$$

Παρατήρηση: Η κατανομή Gamma είναι γενίκευση της εκθετικής κατανομής για $a=1$.