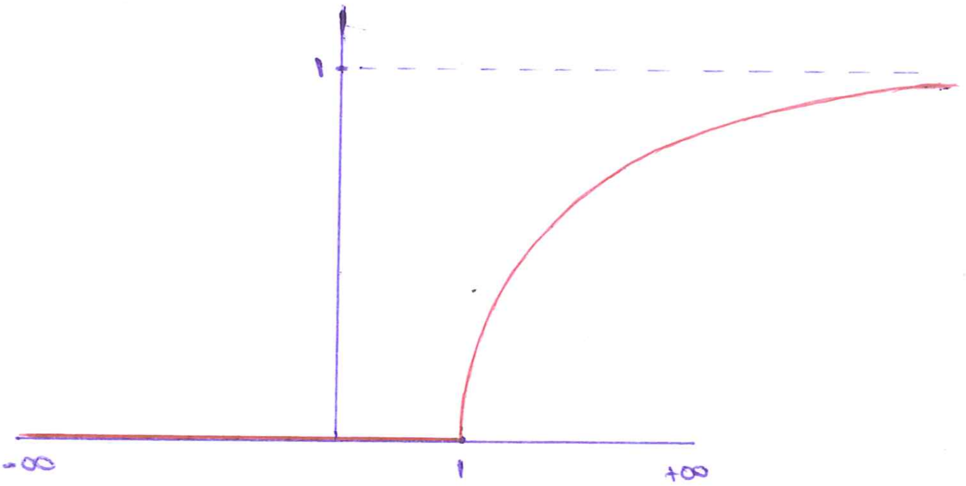
Φροντιστήριο 5ο   15, 19/04/2019

π.χ. 2 : $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x} & x \geq 1 \end{cases}$

παρατηρούμε ότι η F είναι παντού συνεχής (μη παραγωγίσιμη στο 1), γνησίως αύξουσα εντός supp και σταθερή εκτός supp.



<u>Άσκηση</u>

Να εξετάσετε αν η F είναι αθροιστική συνάρτηση

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1 - \frac{1}{2^{\lfloor x \rfloor}}, & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{όπου } \lfloor x \rfloor = \max\{m \in \mathbb{N} : m \leq x\} \text{ και } \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

<u>Λύση</u>

Ελέγχουμε αν ισχύουν οι τρεις ιδιότητες της αθροιστικής συνάρτησης F.

1. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Πράγματι, $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, αφού $F(x) = 0$, $\forall x < 1$

Επίσης, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{\lfloor x \rfloor}}\right) = 1 - \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2^{\lfloor x \rfloor}} = 1 - 0 = 1$

2. μη φθίνουσα

Έστω $a, b \in \mathbb{R}$, με $a < b$. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις

- $a < b < 1$

  τότε $F(b) - F(a) = 0 - 0 = 0 \Rightarrow F(a) = F(b)$

- $a < 1$ και $b \geq 1$

  τότε $F(b) - F(a) = 1 - \frac{1}{2^{\lfloor b \rfloor}} - 0 = 1 - \frac{1}{2^{\lfloor b \rfloor}} > 0 \Rightarrow F(a) < F(b)$

- $1 \leq a < b$

  τότε $F(b) - F(a) = \left(1 - \frac{1}{2^{\lfloor b \rfloor}}\right) - \left(1 - \frac{1}{2^{\lfloor a \rfloor}}\right) = \frac{1}{2^{\lfloor a \rfloor}} - \frac{1}{2^{\lfloor b \rfloor}} \geq 0$

  $\Rightarrow F(a) \leq F(b)$

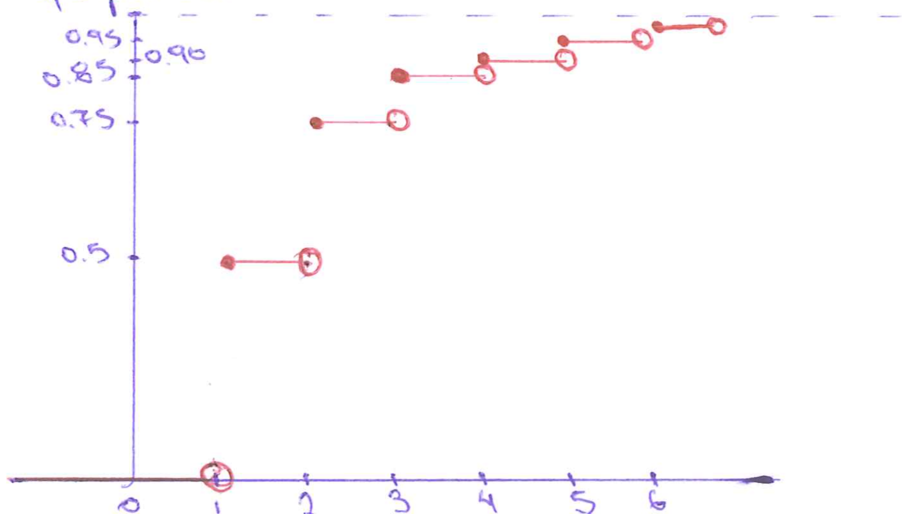
3. Από δεξιά συνεχής

Έστω $a \in \mathbb{R}$

- αν $a < 1$ τότε $\lim_{x \to a^+} F(x) = \lim_{x \to a^+} F(x) = F(a) = 0$
- αν $a \geq 1$ τότε $\lim_{x \to a^+} F(x) = \lim_{x \to a^+} \left(1 - \frac{1}{2^{\lfloor x \rfloor}}\right) = 1 - \frac{1}{2^{\lfloor a \rfloor}} = F(a)$

Συνεπώς, η F είναι συνεχής από δεξιά.

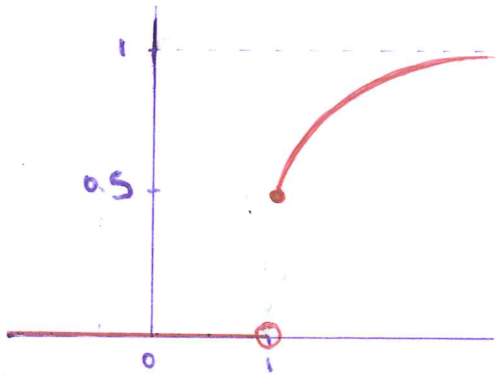
Εφόσον 1, 2, 3 ισχύουν, η F είναι αθροιστική συνάρτηση. Επίσης, έχει αριθμήσιμο πλήθος ασυνεχειών (το πλήθος των φυσικών)



Άσκηση

Να εξετάσετε αν η παρακάτω συνάρτηση είναι αθροιστική συνάρτηση

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{2^x}, & x \geq 1 \end{cases}$$



$supp(P) = [1, +\infty)$

Λύση

Ελέγχουμε τις ιδιότητες της αθροιστικής συνάρτησης

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, αφού $F(x) = 0$, για $x < 1$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^x}\right) = 1 - 0 = 1$$

2. μη φθίνουσα

Έστω $a, b \in \mathbb{R}$, με $a < b$. Όπως και πριν, υπάρχουν τρεις περιπτώσεις

- $a < b < 1$

  τότε $F(b) - F(a) = 0 - 0 = 0 \Rightarrow F(a) = F(b)$

- $a < 1$ και $b \geq 1$

  τότε $F(b) - F(a) = 1 - \dfrac{1}{2^b} - 0 = 1 - \dfrac{1}{2^b} > 0 \Rightarrow F(a) < F(b)$

- $1 \leq a < b$

  τότε $F(b) - F(a) = \left(1 - \dfrac{1}{2^b}\right) - \left(1 - \dfrac{1}{2^a}\right) = \dfrac{1}{2^a} - \dfrac{1}{2^b} > 0$

Επομένως σε κάθε περίπτωση $F(b) - F(a) \geq 0$.

3. Από δεξιά συνεχής

- αν $a < 1$ τότε $\lim\limits_{x \to a^+} F(x) = 0 = F(a)$

- αν $a \geq 1$ τότε $\lim\limits_{x \to a^+} F(x) = \lim\limits_{x \to a^+} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = 1 - \dfrac{1}{a} = F(a)$

Άρα η $F(x)$ είναι από δεξιά συνεχής

Άρα 1, 2, 3 ισχύουν και η F είναι πράγματι αθροιστική.

* Η P είναι <u>συνεχής</u> με <u>ασυνεχή</u> F

Άσκηση

Να εξετάσετε αν η F είναι αθροιστική συνάρτηση

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, & x \geq 0 \end{cases}$$

Δίνεται : $\int_{0}^{+\infty} e^{-k^2} dk = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, ολοκλήρωμα Gauss

Λύση

Ελέγχουμε τις ιδιότητες της αθροιστικής συνάρτησης

1. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, αφού $F(x)=0$ για $x<0$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

* παρατηρούμε ότι η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι άρτια. Δηλαδή, $f(x) = f(-x)$, αφού το z είναι στο τετράγωνο

** για να χρησιμοποιήσουμε το ολοκλήρωμα Gauss θα πρέπει να μετασχηματίσουμε τα όρια.

Αλλαγή μεταβλητής προς ολοκλήρωση

$p = -z \Rightarrow z = -p$	Νέα όρια
$dp = -dz \Rightarrow dz = -dp$	$p_1 = -(-\infty) = +\infty \Rightarrow$ κάτω όριο, $p_2 = -0 = 0 \Rightarrow$ πάνω όριο — αντιστρέφω με (−)

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(-p)^2} (-dp) \right] + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{p^2}{2}} dp + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια διαδικασία. Συνεπώς, μπορούμε να αλλάξουμε το όνομα της μεταβλητής προς ολοκλήρωση αφού οι προς ολοκλήρωση συναρτήσεις είναι ίδιες.

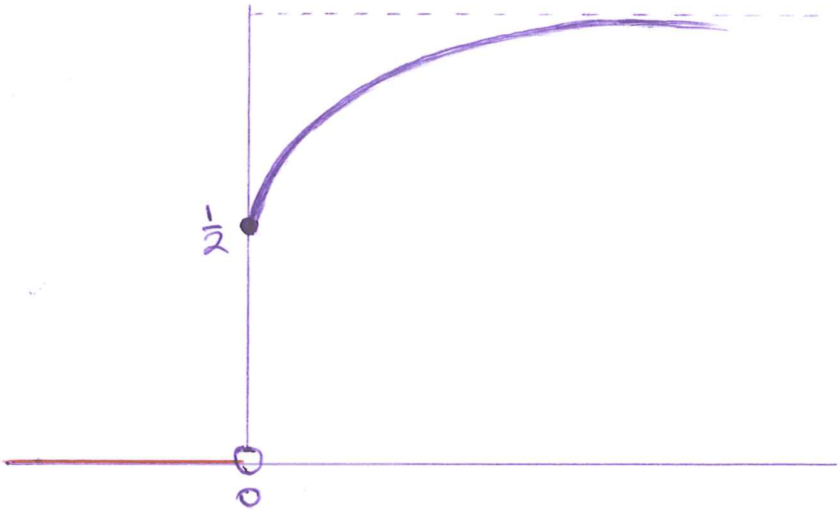
3. Από δεξιά συνεχής

Έστω $a \in \mathbb{R}$

· $a < 0 \Rightarrow \lim_{x \to a^+} F(x) = F(a) = 0$

· $a \geq 0 \Rightarrow \lim_{x \to a^+} F(x) = \lim_{x \to a^+} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = F(a)$

Αφού ισχύουν οι παραπάνω ιδιότητες, η F είναι πράγματι αθροιστική συνάρτηση.



$$F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

αλλαγή μεταβλητής προς ολοκλήρωση

$$\left\{ \begin{array}{l|l} \underbrace{k = -\frac{z}{\sqrt{2}}} \Rightarrow z = -k\sqrt{2} & \text{Νέα όρια} \\ & k_1 = -(-\infty) = +\infty \\ dk = -\frac{1}{\sqrt{2}} dz \Rightarrow dz = -dk\sqrt{2} & k_2 = -0 = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{0} -e^{-k^2} dk\sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{0} e^{-k^2} dk = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-k^2} dk = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2} dz$$

Αλλαγή Μεταβλητής προς ολοκλήρωση

$$\underbrace{k = \frac{z}{\sqrt{2}}}_{} \Rightarrow z = \sqrt{2}\, k \quad \Big| \text{ Νέα όρια}$$

$$z_1 = 0$$

$$dk = \frac{1}{\sqrt{2}} dz \Rightarrow dz = \sqrt{2}\, dk \quad \Big| \; z_2 = +\infty$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-k^2} \sqrt{2}\, dk = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-k^2} dk = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$$

2. μη φθίνουσα

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$

- περίπτωση 1η : $x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow F(x_1) = F(x_2) = 0$
- περίπτωση 2η : $F(x_1) = 0$, $F(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$

  $x_1 < 0$, $x_2 \geq 0$

  $$\Rightarrow F(x_2) - F(x_1) > 0$$

- περίπτωση 3η : $F(x_2) - F(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

  $0 \leq x_1 < x_2$

από ιδιότητες ολοκληρώματος Riemann γνωρίζουμε ότι

αν $x_1 < x_2$ $\quad \int_{-\infty}^{x_2} = \int_{-\infty}^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2}$

αντικαθιστούμε:

$$\Rightarrow F(x_2) - F(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz > 0 \Rightarrow F(x_2) > F(x_1)$$

Συνεπώς, η F είναι μη φθίνουσα