Φροντιστήριο 3º. 18.22/03/2019

Υπολογισμός Πιθανοτήτων

Μπορούμε να υπολογίσουμε, χρησιμοποιώντας τις παραπάνω κατανομές, την πιθανότητα που αποδίδεται σε οποιοδήποτε διάστημα των πραγματικών($\in \Sigma_{\mathbb{R}}$).

Παράδειγμα

Δίνεται η κατανομή Poisson. Να υπολογιστεί η πιθανότητα

$P((-2,-1)\cup(1,3/2))$

Απάντηση

Αρχικά βλέπουμε ότι το ενδεχόμενο $(-2,-1)\cup(1,3/2)\in\Sigma_{\mathbb{R}}$. Συνεπώς έχει νόημα να υπολογίσουμε την πιθανότητα. Εναλλακτικά, αν η περιγραφή που μας έχει δοθεί δεν είναι πλήρης, δηλαδή δεν ικανοποιούνται τα κριτήρια 1 & 2, τότε δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την P.

$$P((-2,-1)\cup(1,3/2)) = P\left[((-2,-1)\cup(1,3/2))\cap supp\right] \text{ όπου } supp=\mathbb{N}=\{0,\dots\}$$

$$\Rightarrow P\left[((-2,-1)\cup(1,3/2))\cap\{0,1,2,\dots\}\right] = P(\varnothing)=0$$

Συνεπώς, η κατανομή Poisson αποδίδει μηδενική πιθανότητα σε αυτό το διάστημα.

Ποια είναι η πιθανότητα $P((-2,-1)\cup[1,3/2))$;

Απάντηση

$$P((-2,-1)\cup[1,3/2)) = P\left(((-2,-1)\cup[1,3/2))\cap\{0,1,\dots\}\right) = P(\{1\}) = \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} = \lambda\cdot e^{-\lambda}$$

Έστω ότι $\lambda=\frac{1}{2} \Rightarrow P(\{1\}) = \frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}}$

Ποια είναι η πιθανότητα $P((-2,-1)\cup[1,3])$;

Απάντηση

$$P((-2,-1)\cup[1,3]) = P\left(((-2,-1)\cup[1,3])\cap\{0,1,\dots\}\right) = P(\{1,2,3\}) \overset{\text{ΑΡΙΘΜΗΣΙΜΗ ΠΡΟΣΘΕΤΙΚΟΤΗΤΑ}}{=}$$

$$= P(\{1\}\cup\{2\}\cup\{3\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) =$$

$$= \lambda\cdot e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda} + \frac{\lambda^3}{3}\cdot e^{-\lambda} = \lambda\cdot e^{-\lambda}\left(1+\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda^2}{6}\right)$$

Ερώτηση

Πόσες κατανομές Poisson υπάρχουν;

Απάντηση

Μπορούν να υπάρξουν τόσες κατανομές Poisson όσες και οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει το λ στο διάστημα $(0, +\infty)$. Συνεπώς, το προηγούμενο παράδειγμα είναι μια οικογένεια κατανομών με παράμετρο λ.

Γενικότερα, στο στατιστικό πρόβλημα αν γνωρίζουμε σε ποια οικογένεια η εκάστοτε κατανομή (π.χ. Poisson), τότε πρέπει να βρούμε την παράμετρο της (π.χ. λ). Συνεπώς, το πρόβλημα εύρεσης της άγνωστης κατανομής ανάγεται σε πρόβλημα εύρεσης της άγνωστης παραμέτρου.

Κατανομές Πιθανότητας στους πραγματικούς

Αθροιστική Συνάρτηση

Υπάρχει δυσκολία περιγραφής των διακριτών κατανομών. Για τον λόγο αυτό χρειαζόμαστε έννοιες πιο "οικείες", προκειμένου να περιγράφουμε μια κατανομή (π.χ. συναρτήσεις $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Η πρώτη έννοια που συναντούμε είναι η Αθροιστική Συνάρτηση.

Ορισμός:

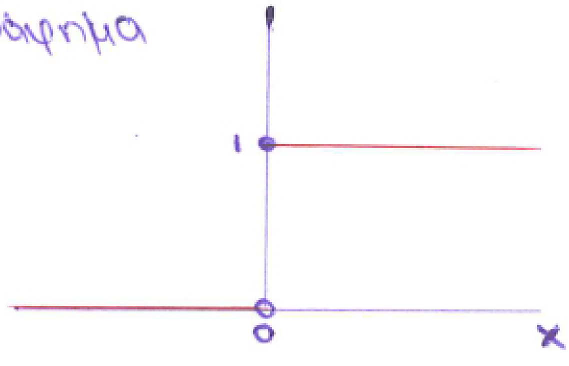
Έστω κατανομή P στο $\mathbb{R}$. Η αθροιστική συνάρτηση της κατανομής (cdf - cumulative distribution function) είναι η $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, που ορίζεται από: $F(x) = P((-\infty, x]) \ \forall \ x \in \mathbb{R}$.
Εφόσον $(-\infty, x] \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ τότε υπάρχει η $P((-\infty, x])$ και είναι καλώς ορισμένη, που σημαίνει ότι ορίζεται για οποιαδήποτε κατανομή πιθανότητας και την αναπαριστά πλήρως.

π.χ. Εκφυλισμένη κατανομή στο 0, $P(\{0\}) = 1$, $supp(P) = \{0\}$

Έχουμε ότι $F(x) = P((-\infty, x]) = P((-\infty, x] \cap \{0\})$

$$= \begin{cases} P(\emptyset), & \text{αν } x < 0 \\ P(\{0\}), & \text{αν } x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Γράφημα



π.χ. Ber(q), $supp(Ber) = \{0,1\}$, $P(\{0\}) = 1-q$, $P(\{1\}) = q$

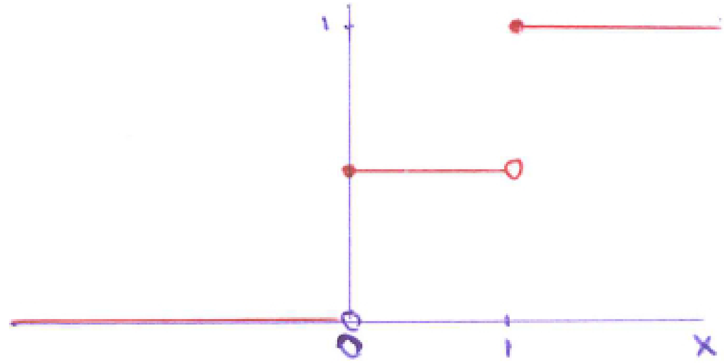
$$F(x) = P\big((-\infty, x]\big) = P\big((-\infty, x] \cap supp\big) = P\big((-\infty, x] \cap \{0,1\}\big)$$

$$= \begin{cases} P(\emptyset), & x<0 \\ P(\{0\}), & 0 \leq x < 1 \\ P(\{0,1\}), & x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-q, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Ιδιότητες

- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\forall\ x<0$
- $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$, $\forall\ x \geq 1$
- μη φθίνουσα

Γράφημα



Παρατηρούμε ότι και στα δύο παραδείγματα οι cdf είναι αύξουσες, ασυνεχείς σε σημεία, αλλά είναι παντού από δεξιά συνεχείς.

Θεώρημα:

Η F έχει τις εξής τρεις ιδιότητες

1. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
2. Η F είναι αύξουσα, δηλαδή αν $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$
3. Η F είναι από δεξιά συνεχής, δηλ. $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $\lim_{y \to x^+} F(y) = F(x)$

Αντίστροφα, αν κάποια $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις 1. 2. 3. τότε είναι η cdf μοναδικής κατανομής P στο $\mathbb{R}$.

Το παραπάνω είναι θεώρημα αναπαράστασης, αφού, δεδομένου ότι σε κάθε P αντιστοιχεί μοναδική F, αυτό μας λέει ότι ισχύει και το αντίστροφο. Αυτό σημαίνει ότι η F αναπαριστά "τέλεια" την P, οπότε μπορούμε να ορίζουμε την P μέσω της F, να βρούμε τις πιθανότητες που αυτή αποδίδει κ.α.

Υπολογισμός Πιθανοτήτων βάσει της cdf

Εφόσον η F αναπαριστά την P θα πρέπει μέσω της F να μπορούμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες που η P αποδίδει

Εξ ορισμού :
$$\left.\begin{aligned} P((-\infty, x]) &= F(x) \\ P((-\infty, x)) &= \lim_{y \to x^-} F(y) \end{aligned}\right\}$$

Συνεπώς : $P(\{x\}) = F(x) - \lim_{y \to x^-} F(y)$

Για $a < b$

- $P((a,b]) = F(B) - F(A)$

υπολογίζω : $P((-\infty, b]) = P((-\infty, a] \cup (a,b]) \Rightarrow$

$$P((-\infty, b]) = P((-\infty, a]) + P((a,b])$$

$$\Rightarrow P((a,b]) = P((-\infty, b]) - P((-\infty, a])$$

$$\Rightarrow P((a,b]) = F(\beta) - F(a)$$

- $P([a,b)) = \lim_{x \to \beta^-} F(x) - \lim_{x \to a^-} F(x)$

υπολογίζω : $P((-\infty, b)) = P((-\infty, a) \cup [a,b)) \Rightarrow$

$$P((-\infty, b)) = P((-\infty, a)) + P([a,b))$$

$$\Rightarrow P([a,b)) = P((-\infty, b)) - P((-\infty, a))$$

$$\Rightarrow P([a,b)) = \lim_{x \to \beta^-} F(x) - \lim_{x \to a^-} F(x)$$

· $P([a,b]) =$

υπολογίζω: $P((-\infty, b]) = P((-\infty, a) \cup [a, b])$

$$P((-\infty, b]) = P((-\infty, a)) + P([a, b])$$

$$\Rightarrow P([a, b]) = P((-\infty, b]) - P((-\infty, a))$$

$$\Rightarrow P([a, b]) = F(b) - \lim_{x \to a^-} F(x)$$

· $P(\{b\}) = F(b) - \lim_{y \to b^-} F(y)$

Παράδειγμα

Έστω μετρήσιμος χώρος $(\mathbb{R}, \Sigma_{\mathbb{R}})$. Να βρεθεί η αθροιστική συνάρτηση για την κατανομή Poisson, $Pois(\lambda)$.

Δίνονται

· $supp(P) = \{0, 1, 2, \dots\}$,

· $P(\{x\}) = \dfrac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \quad \forall\ x \in supp(P)$

· $\lambda \in (0, +\infty)$

Λύση

Από τον ορισμό έχουμε

$$F(x) = P((-\infty, x]) = P((-\infty, x] \cap supp(P)) = \begin{cases} P(\emptyset), & x < 0 \\ \sum_{i=0}^{x} P(\{i\}), & x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{x} \frac{\lambda^i}{i!}, & x \geq 0 \end{cases}$$

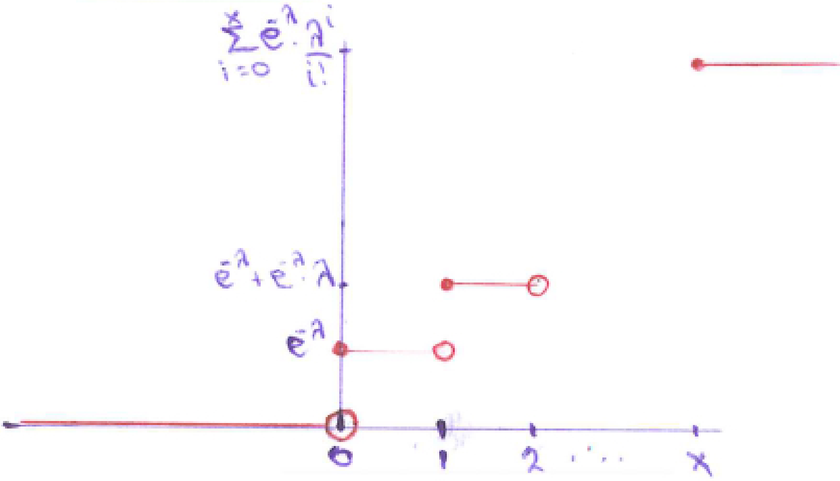
· $x < 0 \Rightarrow P((-\infty, x]) = P((-\infty, x] \cap supp(P)) = P(\emptyset) = 0$

· $0 \leq x < 1 \Rightarrow P((-\infty, x]) = P((-\infty, x] \cap supp(P)) = P(\{0\}) = e^{-\lambda}$

· $1 \leq x < 2 \Rightarrow P((-\infty, x]) = P((-\infty, x] \cap supp(P)) = P(\{0\}) + P(\{1\})$

$$= e^{-\lambda} + \lambda \cdot e^{-\lambda}$$

Γράφημα



Το στήριγμα της Poisson είναι απειροπληθές και έχει ασυνέχειες.

Υπολογισμός πιθανοτήτων

π.χ. $P(\{0\}) = F(0) - \lim_{y \to 0^-} F(y) = e^{-\lambda} - \lim_{y\to 0^-} F(y) = e^{-\lambda} - 0 = e^{-\lambda}$

$$P(\{2\}) = F(2) - \lim_{y\to 2^-} F(y) = e^{-\lambda} + e^{-\lambda}\cdot\lambda + e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^2}{2} - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda}$$
$$= e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^2}{2}$$

Επιβεβαίωση Ιδιοτήτων της F

1. $\lim_{x\to -\infty} F(x) = 0, \ \forall\, x<0$

$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$, διότι $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty}\left\{ e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{x}\frac{\lambda^i}{i!}\right\} = e^{-\lambda}\underbrace{\left\{\lim_{x\to+\infty}\sum_{i=0}^{x}\frac{\lambda^i}{i!}\right\}}_{\text{Maclaurin}}$

$= e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1$

2. Έστω $x_1 < x_2$ τότε $F(x)$ είναι μη φθίνουσα
   - Αν $x_1, x_2 < 0 \Rightarrow F(x_1) = F(x_2)$
   - Αν $x_1 < 0 \leq x_2 \Rightarrow F(x_1) = 0 < F(x_2) = e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{x_2}\frac{\lambda^i}{i!}$

3. Από δεξιά συνεχής
   - $\lim_{x\to 0^+} F(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{x}\frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}$, $\lim_{x\to 1^+} F(x) = \lim_{x\to 1^+} e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{x}\frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} + e^{-\lambda}\cdot\lambda$

4. Πλήθος ασυνεχειών: σύνολο φυσικών $\mathbb{N}$.