Φροντιστήριο 1ο, 01/03/2019

Αναζήτηση ενός μοντέλου πιθανότητας

Η καταλληλότερη 'μαθηματική γλώσσα' για την ανάπτυξη της 'Θεωρίας των Πιθανοτήτων' είναι η Θεωρία Μέτρου.

Ας σκεφτούμε το πείραμα του ζαριού. Ποια είναι τα δυνατά αποτελέσματα που μπορούν να εμφανιστούν μετά την εκτέλεση του πειράματος (δηλαδή μετά τη ρίψη του ζαριού)?

Είναι τα εξής: 1, 2, 3, 4, 5, 6

Συλλέγοντας όλα αυτά τα αποτελέσματα σε ένα σύνολο, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ δημιουργούμε τον δειγματικό χώρο.

Το Ω είναι το σίγουρο ενδεχόμενο, ενώ τα μονοσύνολα $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$ είναι τα στοιχειώδη ενδεχόμενα

Συνεπώς, όταν έχουμε ένα τυχαίο πείραμα το πρώτο πράγμα που πρέπει να κάνουμε είναι να συλλέξουμε όλα τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος σε ένα σύνολο Ω, να δημιουργήσουμε δηλαδή το δειγματικό χώρο.

Στη συνέχεια, θα πρέπει να ορίσουμε όλα εκείνα τα ενδεχόμενα, την πιθανότητα των οποίων μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε. Δουλεύουμε σε δύο στάδια:

α. Συλλογή όλων των ενδεχομένων που μας ενδιαφέρουν σε ένα σύνολο ενδεχομένων (κλάση υποσυνόλων του Ω)

β. Ανάθεση, σε κάθε ένα από αυτά, μιας πιθανότητας ή πιο σωστά, ένα μέτρο πιθανότητας

Το σύνολο των ενδεχομένων θα πρέπει να μας εξασφαλίζει ότι κάποιες πράξεις μεταξύ ενδεχομένων καταλήγουν πάντα σε κάποιο ενδεχόμενο.

π.χ. αν στοιχηματίζαμε είτε στο $\{1, 2\}$ είτε στο $\{6\}$ θα θέλαμε αυτό το στοίχημα να είναι ισοδύναμο με $\{1, 2, 6\}$

Αυτό σημαίνει ότι απαιτούμε από το χώρο ενδεχομένων να είναι 'κλειστός' ως προς κάποιες πράξεις μεταξύ ενδεχομένων. Η πιο χρήσιμη δομή κλειστότητας είναι αυτή της σ-άλγεβρας.

Ακολούθως, για να προσάψουμε πιθανότητες σε καθένα από τα στοιχεία αυτού του χώρου ορίζουμε μια συνολο-συνάρτηση με πεδίο ορισμού των χώρο ενδεχομένων και πεδίο τιμών τους μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς.

<u>Ορισμός</u>: Χώρος Πιθανότητας

(ή Σ ο συλλογή μετρησίμων υποσυνόλων)

Έστω ο δειγματικός χώρος Ω και μία σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$, αποτελούμενη από υποσύνολα του Ω, την οποία ονομάζουμε χώρο ενδεχομένων. Πάνω στο χώρο ενδεχομένων ορίζουμε τη συνολο-συνάρτηση πιθανότητας P η οποία πληροί τις ακόλουθες ιδιότητες:

i. $P(A) \geq 0$ για κάθε ενδεχόμενο $A \in \mathcal{F}$

ii. $P(\Omega) = 1$

iii. Για κάθε ακολουθία A_i, $i = 1, 2, \ldots$ ενδεχομένων τα οποία είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα, ισχύει ότι

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Η τριάδα $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ονομάζεται χώρος πιθανότητας.

Παρατηρήσεις:

α. επειδή $\Omega \cup \Omega' = \Omega \cup \emptyset = \Omega$ και $\Omega \cap \emptyset' = \emptyset$ τα ενδεχόμενα Ω (σίγουρο ενδεχόμενο) και $\emptyset$ (αδύνατο ενδεχόμενο) είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα. Συνεπώς,

$$P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset) = P(\Omega)$$

που συνεπάγεται ότι $P(\emptyset) = 0$. Συνεπώς, $P(\Omega) = 1$.

β. $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$ χωρίς αυτό να σημαίνει ότι το Ω είναι το μόνο ενδεχόμενο με πιθανότητα ίση με τη μονάδα και το $\emptyset$ το μόνο ενδεχόμενο με πιθανότητα ίση με το μηδέν. Μπορούμε, για παράδειγμα, να έχουμε ένα ενδεχόμενο $A \in \mathcal{F}$ και ένα άλλο $B \in \mathcal{F}$ τέτοια ώστε $P(A) = 1$, $P(B) = 0$ με $A \subset \Omega$ και $\emptyset \subset B$

γ. κάθε ενδεχόμενο $A \in \mathcal{F}$ έχει πιθανότητα μεγαλύτερη ή ίση από το μηδέν και μικρότερη ή ίση από το ένα.

$0 \leq P(A) \leq 1$.

Εφόσον η P είναι μέτρο θα πληροί τις γενικές ιδιότητες του μέτρου, μία εκ των οποίων είναι και η μονοτονικότητα. Συνεπώς, αφού κάθε ενδεχόμενο $A \in \mathcal{F}$ είναι υποσύνολο του Ω, θα ισχύει ότι $P(A) \leq P(\Omega)$ και κατα συνέπεια, αφού $P(A) \geq 0$, και $P(\Omega) = 1$ προκύπτει ότι $0 \leq P(A) \leq 1$. Επίσης, αν τα ενδεχόμενα της ακολουθίας A_i, $i = 1, 2, ..$ δεν είναι αναγκαστικά αμοιβαίως αποκλειόμενα ισχύει ότι

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} A_i$$

Τέλος, αφού ο χώρος πιθανότητας είναι χώρος πεπερασμένου μέτρου, η συνάρτηση P έχει την επιπλέον ιδιότητα ότι για $A, B \in \mathcal{F}$ με $A \subseteq B$ ισχύει ότι

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

δ. Ο όρος 'ενδεχόμενο' αποδίδεται μόνο στα υποσύνολα του Ω που περιέχονται στο χώρο ενδεχομένων $\mathcal{F}$ και όχι σε κάθε υποσύνολο του Ω. Φυσικά, αν ο $\mathcal{F}$ είναι το δυναμοσύνολο, $P(\Omega)$, του Ω, τότε κάθε υποσύνολο του Ω είναι αυτομάτως ενδεχόμενο. Αν όμως ο $\mathcal{F}$ δεν συμπίπτει με το δυναμοσύνολο του Ω, τότε τα υποσύνολα του Ω που δεν ανήκουν στον $\mathcal{F}$ δεν θα ονομάζονται ενδεχόμενα. Μόνο τα μετρήσιμα υποσύνολα του Ω θα φέρουν τον τίτλο ενδεχόμενο.

π.χ. $\Omega = \{1, 2, 5, 6\}$ και $\mathcal{F} = \{\{1, 2\}, \{5, 6\}, \Omega, \emptyset\}$

αφενός ο $\mathcal{F}$ δε συμπίπτει με το δυναμοσύνολο του Ω, αφετέρου είναι σ-άλγεβρα. Συνεπώς, τα μόνα υποσύνολα του Ω που θεωρούμε ως ενδεχόμενα είναι αυτά που βρίσκονται στον $\mathcal{F}$. Πολλά άλλα υποσύνολα του Ω δεν είναι ενδεχόμενα, όπως τα $\{1\}, \{2\}, \{5\}, \{6\}$.

Δειγματικοί Χώροι

Η τελευταία παρατήρηση δημιουργεί το ερώτημα 'γιατί να μην θεωρούμε πάντα το δυναμοσύνολο του δειγματικού χώρου ως τον σχετικό χώρο ενδεχομένων;'

Η απάντηση εξαρτάται από τη φύση του δειγματικού χώρου. Υπάρχουν τρία είδη δειγματικών χώρων.

i. Πεπερασμένος δειγματικός χώρος: περιέχει πεπερασμένο αριθμό στοιχείων
ii. Διακριτός δειγματικός χώρος: περιέχει αριθμήσιμα άπειρα στοιχεία
iii. Υπεραριθμήσιμος δειγματικός χώρος: περιέχει υπεραριθμήσιμο αριθμό στοιχείων

Αν ισχύουν οι περιπτώσεις i. ή ii τότε μπορούμε πάντα να θεωρούμε το δυναμοσύνολο του Ω ως τον κατάλληλο χώρο ενδεχομένων, δηλαδή $P(\Omega) = \mathcal{F}$. Πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να προσάψουμε πιθανότητα σε καθένα από τα υποσύνολα του δειγματικού χώρου.

Στην περίπτωση iii. το δυναμοσύνολο του Ω δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως χώρος ενδεχομένων, διότι δεν μπορεί να υπάρξει συνάρτηση πιθανότητας η οποία να ικανοποιεί τη συνθήκη της αριθμήσιμης προσθετικότητας.

Κατασκευή Συναρτήσεων Πιθανότητας

Έστω πεπερασμένος δειγματικός χώρος Ω που περιέχει n στοιχεία $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$.
Χώρος ενδεχομένων $P(\Omega) = \mathcal{F}$. Με ποιο τρόπο μπορούμε να προσάψουμε πιθανότητες σε κάθε ενδεχόμενο $A \in \mathcal{F}$;
Εναλλακτικά, πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε τη συνάρτηση πιθανότητας $P: \mathcal{F} \to [0, 1]$ σε αυτή την περίπτωση;

Βήμα 1: Θεωρούμε όλα τα στοιχειώδη ενδεχόμενα του $\mathcal{F}$, δηλαδή τα $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \ldots, \{\omega_n\}$

Βήμα 2: Ορίζουμε σε καθένα από αυτά μια πιθανότητα $P(\{\omega_j\}) \equiv P_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ με τέτοιο τρόπο ώστε $\sum_{j=1}^{n} P_j = 1$

Αυτός ο ορισμός πιθανοτήτων για καθένα από τα ενδεχόμενα είναι επαρκής για να ορίσει τη συνάρτηση πιθανότητας $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ πάνω σε όλο το χώρο ενδεχομένων $\mathcal{F}$.

Συνεπώς, για οποιοδήποτε ενδεχόμενο $A \in \mathcal{F}$ αρκεί να δούμε πόσα και ποια ω_j περιέχει και να ορίσουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου A το άθροισμα των αντίστοιχων πιθανοτήτων P_j, δηλαδή $P(A) = \sum_{\omega \in A} P_j$

Παραδείγματα Συναρτήσεων Πιθανότητας

α. Ρίψη Νομίσματος

στοιχεία δειγματικού χώρου: κορώνα (Κ) ή γράμματα (Γ)

δειγματικός χώρος: $\Omega = \{K, \Gamma\}$ πεπερασμένος

συνεπώς, μπορούμε να ορίσουμε ως χώρο ενδεχομένων το δυναμοσύνολο του Ω, δηλαδή, $\mathcal{F} = \{\{K\}, \{\Gamma\}, \Omega, \emptyset\}$.

Επιπλέον, είναι εφικτό να ορίσουμε μία P πάνω στον χώρο ενδεχομένων $\mathcal{F}$, η οποία πληροί τις απαιτήσεις της συνάρτησης πιθανότητας.

i. Δηλαδή, προσάπτουμε έναν αριθμό P_j, $j = 1, 2$, $0 \leq P_j \leq 1$ σε κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο, με τέτοιο τρόπο ώστε $P(\Omega) = \sum_j P_j = 1$

ii. Στη συνέχεια ορίζουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A \in \mathcal{F}$ το άθροισμα των πιθανοτήτων P_j, $P(A) = \sum_{\omega_j \in A} P_j$

Έχουμε $P_1 = P(\{K\}) = \frac{1}{2}$, $P_2 = P(\{\Gamma\}) = \frac{1}{2}$, $P(\Omega) = 1$

Επίσης, για οποιαδήποτε ενδεχόμενα της $\mathcal{F}$, τα οποία είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα μεταξύ τους, η πιθανότητα της ένωσής τους ισούται με το άθροισμα των πιθανοτήτων τους. Συνεπώς, η συνάρτηση $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ ορισμένη ως $P(\{K\}) = P(\{\Gamma\}) = \frac{1}{2}$, $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$ είναι συνάρτηση πιθανότητας.

Τι συμβαίνει στην περίπτωση που το νόμισμα δεν είναι δίκαιο; (βλ. Πιττής, 2010)

Ανεξαρτησία Ενδεχομένων

Εστω ένα τυχαίο πείραμα και δύο ενδεχόμενα A_1, A_2 για τα οποία γνωρίζουμε ότι οι πιθανότητες να συμβούν είναι $P(A_1) = 0.5$ και $P(A_2) = 0.4$. Πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι για ένα μεγάλο αριθμό επαναλήψεων του πειράματος το A_1 θα συμβεί στο 50% των επαναλήψεων. Αν το A_2 είναι ανεξάρτητο από το A_1, τότε η πραγματοποίηση του A_1 δεν θα πρέπει να επηρεάζει την πιθανότητα του να συμβεί το A_2. Ουσιαστικά, θα πρέπει το A_2 να συνεχίσει να εμφανίζεται με συχνότητα 40%. Συνεπώς, η πιθανότητα του να συμβεί και το A_1 και το A_2 ταυτόχρονα $(A_1 \cap A_2)$ θα πρέπει να ισούται με το γινόμενο των αντίστοιχων πιθανοτήτων των A_1 και A_2

Ορισμός : Ανεξαρτησία δύο ενδεχομένων

Εστω ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και δύο ενδεχόμενα $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$. Τα ενδεχόμενα αυτά θα λέγονται ανεξάρτητα αν και μόνο αν

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$$

προκύπτει ότι $P(A_1' \cap A_2) = P(A_1') \cdot P(A_2)$, που σημαίνει ότι αν τα A_1 και A_2 είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα, τότε και το συμπλήρωμα του A_1 είναι ανεξάρτητο του A_2.

Παράδειγμα

Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Ο χώρος ενδεχομένων $\mathcal{F}$ είναι το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(\Omega)$ και η συνάρτηση πιθανότητας $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ προκύπτει προσάπτοντας πιθανότητα ίση με $\frac{1}{4}$ σε καθένα από τα στοιχειώδη ενδεχόμενα $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$. Έστω τα ενδεχόμενα $A_1 = \{1, 4\}$ και $A_2 = \{1, 5\}$ καθένα εκ των οποίων έχει πιθανότητα ίση με $\frac{1}{2}$. Είναι τα A_1 και A_2 ανεξάρτητα ενδεχόμενα;

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα βρίσκουμε πρώτα την τομή τους. $A_1 \cap A_2 = \{1\}$ το οποίο είναι ενδεχόμενο πιθανότητας ίσης με $\frac{1}{4}$. Επίσης, $P(A_1)\,P(A_2) = \frac{1}{4}$. Συνεπώς, τα A_1 και A_2 είναι ανεξάρτητα.

Δεσμευμένη Πιθανότητα

Μας επιτρέπει να ενσωματώσουμε την οποιαδήποτε διαθέσιμη πληροφορία έχουμε σχετικά με ένα ενδεχόμενο, στον υπολογισμό της πιθανότητας αυτού του ενδεχομένου.

Ας υποθέσουμε το πείραμα της ρίψης του ζαριού, όπου $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και χώρος ενδεχομένων $\mathcal{F}$, το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(\Omega)$. Υποθέτοντας ότι το ζάρι είναι δίκαιο, προσάπτουμε πιθανότητα ίση με $\frac{1}{6}$ σε κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο με συνάρτηση πιθανότητας $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$
Η πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο $A = \{2, 4, 6\}$ είναι 0.5, δηλαδή $P(A) = \frac{1}{2}$. Ωστόσο, αν γνωρίζαμε ότι το ενδεχόμενο $B = \{2\}$ έχει ήδη συμβεί τότε η πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο A είναι ίση με 1, στο συγκεκριμένο παράδειγμα. Αυτή η πιθανότητα ονομάζεται δεσμευμένη πιθανότητα (του ενδεχομένου A με δέσμευση το ενδεχόμενο B) και συμβολίζεται με $P(A/B)$.

Ορισμός: Δεσμευμένη πιθανότητα

Έστω A και B δύο ενδεχόμενα του $\mathcal{F}$, με $P(B)>0$. Ορίζουμε τη δεσμευμένη πιθανότητα του ενδεχομένου A ως προς τη δέσμευση του ενδεχομένου B να είναι η

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Παρατηρήσεις

i. $P(B)>0$

ii. Αν $B \subseteq A \Rightarrow A\cap B = B$ και $P(A\cap B) = P(B)$.

Συνεπώς, $P(A/B) = 1$

Αν $A \subseteq B \Rightarrow A\cap B = A$ και $P(A\cap B) = P(A)$

Συνεπώς, $P(A/B) = \frac{P(A)}{P(B)}$

Επιπλέον

Παραδείγματα Κατανομών Πιθανότητας

1. $\Omega = \{K\}$, $\Sigma_\Omega = \{\Omega, \emptyset\}$, $P(\{K\}) = P(\Omega) = 1$

μονοσύνολο

υπάρχει αναγκαστικά μοναδική κατανομή πιθανότητας και την ξέρουμε. Ονομάζεται εκφυλισμένη κατανομή πιθανότητας στο K και ορίζεται ως $P(\{K\}) = 1$

2. $\Omega = \{K, \Gamma\}$, $\Sigma_\Omega = \{\emptyset, \{K\}, \{\Gamma\}, \Omega\}$

Έστω $q \in [0,1]$ και $P_q : \Sigma_\Omega \to [0,1]$ που ορίζεται ως

$P_q(\emptyset) = 0$, $P_q(\{K\}) = q$, $P_q(\{\Gamma\}) = 1-q$, $P_q(\Omega) = 1$

Όλες οι κατανομές με 2 στοιχεία στο Ω έχουν την παραπάνω μορφή. Για παράδειγμα, αν $q = \frac{1}{2}$ έχουμε το πείραμα τύχης του αμερόληπτου κέρματος. Υπάρχουν τόσες κατανομές πιθανότητας σε αυτό το Ω, όσα και τα $q \in [0,1]$. Στο ένα στοιχείο αποδίδεται μια πιθανότητα και στο άλλο η συμπληρωματική του.

Για $q = 1 \Rightarrow$ εκφυλισμένη στο K, αφού $P(\{K\}) = 1$

Για $q = 0 \Rightarrow$ — " — στο Γ, αφού $P(\{\Gamma\}) = 1$

3. $\Omega = \mathbb{R}$.

Το $\Sigma_\mathbb{R}$ δεν μπορεί να περιγραφεί με ακρίβεια. Συνεπώς, υπάρχει δυσκολία περιγραφής όποιας κατανομής πιθανότητας στο $\mathbb{R}$, επειδή είναι δύσκολο να περιγράψουμε το π.ο. της. (χρησιμοποιούμε άλλες έννοιες).

Αντίστροφη Εικόνα

Έστω συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Τότε ορίζεται η αντίστροφη εικόνα του A, μέσω της f, ως το σύνολο των σημείων του Ω τα οποία απεικονίζονται μέσω της f στο A.

$$f^{-1}(A) = \{ w \in \Omega : f(w) \in A \}$$

Παράδειγμα

Έστω $\Omega = \mathbb{R}$ και $f(x) = x^2$

- $A = \{0\}$: $f^{-1}(\{0\}) = \{ w \in \mathbb{R} : f(w) = 0 \}$
  $= \{ w \in \mathbb{R} : w^2 = 0 \} = \{0\}$
- $A = \{1\}$: $f^{-1}(\{1\}) = \{ w \in \mathbb{R} : f(w) = 1 \}$
  $= \{ w \in \mathbb{R} : w^2 = 1 \} = \{-1, 1\}$
- $A = [1,4]$: $f^{-1}([1,4]) = \{ w \in \mathbb{R} : f(w) \in [1,4] \}$
  $= \{ w \in \mathbb{R} : 1 \leq w^2 \leq 4 \} = [-2,-1] \cup [1,2]$
- $A = (-\infty, 0)$: $f^{-1}((-\infty,0)) = \{ w \in \mathbb{R} : f(w) \in (-\infty, 0) \}$
  $= \{ w \in \mathbb{R} : w^2 < 0 \} = \emptyset$
- $A = \mathbb{R}$: $f^{-1}(\mathbb{R}) = \{ w \in \mathbb{R} : f(w) \in \mathbb{R} \} =$
  $= \{ w \in \mathbb{R} : w^2 \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}$
- $A = \emptyset$: $f^{-1}(\emptyset) = \{ w \in \mathbb{R} : f(w) \in \emptyset \}$
  $= \{ w \in \mathbb{R} : w^2 \in \emptyset \} = \emptyset$

Τυχαίες Μεταβλητές

Η στατιστική ασχολείται με τη μελέτη φαινομένων που υπόκεινται σε αβεβαιότητα, π.χ. το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού ή η μεταβολή της τιμής μιας μετοχής δεν μπορούν να προβλεφθούν.

Τέτοιες μεταβλητές ονομάζονται τυχαίες ή στοχαστικές.

Η τυχαία μεταβλητή X παίρνει τιμές σε κάποιο σύνολο $\underline{\Omega}$ (δειγματικός χώρος). Στην περίπτωση του ζαριού έχουμε $\underline{\Omega} = \{1,2,3,4,5,6\}$ και στην περίπτωση της μετοχής έχουμε $\underline{\Omega} = [-0.10,\ 0.10]$. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει σε κάθε στοιχείο του δειγματικού χώρου αντιστοιχούμε μια πιθανότητα p_i και συμβολίζουμε ως εξής:

$$p_i = P(X = x_i)$$

p_i είναι η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να λάβει την τιμή x_i.

Συνεπώς, η τυχαία μεταβλητή X είναι μια πραγματική συνάρτηση η οποία δημιουργεί αντιστοιχία μεταξύ των μετρήσιμων υποσυνόλων ($\mathcal{F}$ ή $\Sigma_{\underline{\Omega}}$) του $\underline{\Omega}$ (πεδίο ορισμού της) και των πραγματικών αριθμών (πεδίο τιμών της). Πρόκειται για μία έννοια πολλαπλά χρήσιμη διότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή κατανομών στους πραγματικούς, επειδή συνδέεται με την έννοια του δείγματος στη στατιστική επαγωγή κ.ο.κ.

Ορισμός

Έστω οι μετρήσιμοι χώροι $(\underline{\Omega}, \mathcal{F})$ και $(\mathbb{R}, \Sigma_{\mathbb{R}})$. Τυχαία μεταβλητή θα ονομάζεται όποια συνάρτηση $X : \underline{\Omega} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε αν $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ τότε $X^{-1}(A) \in \Sigma_{\underline{\Omega}}$. Δηλαδή, οτιδήποτε μπορεί να μετρηθεί στο $\mathbb{R}$ έχει προκύψει ως εικόνα μέσω της X από κάτι που μπορεί να μετρηθεί στον $\underline{\Omega}$. Ουσιαστικά, η τυχαία μεταβλητή μετασχηματίζει ένα μετρήσιμο χώρο σε ένα άλλο μετρήσιμο χώρο και μας επιτρέπει να ορίσουμε νέες πιθανότητες.

Παρατηρήσεις

i. Όταν το Ω είναι πεπερασμένο, οπότε το Σ_Ω μπορεί να επιλεγεί ώστε να περιέχει όλα τα υποσύνολα του Ω, τότε κάθε συνάρτηση $X: \Omega \to \mathbb{R}$ είναι τυχαία μεταβλητή αφού αν $A \in \Sigma_\mathbb{R}$ το $X^{-1}(A) \subseteq \Omega$ οπότε και ανήκει στο Σ_Ω.

ii. Υπάρχουν πραγματικές συναρτήσεις που δεν είναι τυχαίες μεταβλητές π.χ. όταν $(\Omega, \Sigma_\Omega) = (\mathbb{R}, \Sigma_\mathbb{R})$, γνωρίζουμε υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ που είναι μη μετρήσιμο υποσύνολο των πραγματικών $(A \notin \Sigma_\mathbb{R})$. Έστω η $X: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$. Έχουμε ότι $\{1\} \in \Sigma_\mathbb{R}$ αλλά $X^{-1}(\{1\}) = A \notin \Sigma_\mathbb{R}$. Συνεπώς, η X δεν είναι τυχαία μεταβλητή. Άρα η ύπαρξη μη μετρήσιμων συνόλων συνεπάγεται την ύπαρξη συναρτήσεων που δεν είναι τυχαίες μεταβλητές.

iii. Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι κάθε συνεχής και παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ είναι τυχαία μεταβλητή.

iv. $X^{-1}(A)$: εκείνα τα στοιχεία του Ω στα οποία όταν υπολογιστεί η X, μας δίνει κάποιο σημείο του A.

Παραδείγματα

1. $\Omega = \{a, b\}$, $\Sigma_\Omega = \{\emptyset, \Omega, \{a\}, \{b\}\}$, $X: \Omega \to \mathbb{R}$ με $X(a) = 0$, $X(b) = 1$

Αν $A \in \Sigma_\mathbb{R}$ τότε θα ισχύει ότι

$$X^{-1}(A) = \begin{cases} \emptyset, & 0, 1 \notin A \\ \{a\}, & 0 \in A,\ 1 \notin A \\ \{b\}, & 0 \notin A,\ 1 \in A \\ \{\Omega\}, & 0, 1 \in A \end{cases}$$

Συνεπώς, αφού $\emptyset, \Omega, \{a\}, \{b\} \in \Sigma_\Omega$ η X είναι τυχαία μεταβλητή

2. $\Omega = \{K\}$, $\Sigma_\Omega = \{\emptyset, \Omega\}$, $X: \Omega \to \mathbb{R}$.

Έστω $X(K \in \Sigma_\Omega) = C_{\in \Sigma_\mathbb{R}}$. Τότε

$$X^{-1}(A_{\in \Sigma_\mathbb{R}}) = \begin{cases} \{K\} \in \Sigma_\Omega, & \text{αν } C \in A \\ \emptyset \in \Sigma_\Omega, & \text{αν } C \notin A \end{cases}$$

Έστω $C = 6$. Υπολογίστε το $X^{-1}(\cdot)$ για

$A = (-4, -2) \cup (0.3) \Rightarrow X^{-1}(A) = \emptyset$, $6 \notin A$

$B = (4.5) \cap \{6\} \Rightarrow X^{-1}(B) = \{K\}$, $6 \in B$

$\Gamma = (0, 6] \Rightarrow X^{-1}(\Gamma) = \{K\}$, $6 \in \Gamma$