Περαιτέρω Έννοιες στην Θεωρία Ροπών – Ροπογεννήτρια Συνάρτηση

Στα όσα είδαμε στα πλαίσια της θεωρίας ροπών παρατηρήσαμε α) η ακολουθία των ροπών της P είναι δυνατόν να μην χαρακτηρίζει την P, είτε επειδή η ροπή κ-τάξης είναι δυνατόν να μην υπάρχει (ως πραγματικός αριθμός), είτε ακόμη και όταν υπάρχει για κάθε κ, καθώς το $\kappa \to +\infty$ είναι δυνατόν να "μεγενθύνεται" αρκετά γρήγορα, και β) ο υπολογισμός της ροπής κ-τάξης (όταν υπάρχει) είναι δυνατόν να είναι πολύπλοκος, επειδή ακριβώς βάσει του ορισμού προκύπτει για διαδικασία ολοκλήρωσης. Η έννοια της ροπογεννήτριας συνάρτησης (Moment generating function) μας δίνει α) την ικανή και αναγκαία συνθήκη για την αναπαράσταση της P από τις ροπές της, και β) τρόπο υπολογισμού των ροπών μέσω της "απλούστερης" διαδικασίας της παραγώγισης.

Ορισμός. [Ροπογεννήτρια Συνάρτηση – Moment Generating Function (mgf)]. Έστω P κατανομή πιθανότητας στο $\mathbb{R}$, $X \sim P$, τότε αν $t \in \mathbb{R}$, ως ροπογεννήτρια συνάρτηση $M(t)$ της P ορίζεται η

$$M(t) := E(\exp(tX)) = \begin{cases} \sum_{i \in \text{supp}} \exp(ti)\, P(\{i\}), & P \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(tz) f(z)\, dz, & \text{η } f \text{ συνάρτηση πυκνότητας της } P \end{cases}.$$

Σχόλιο. Η M υπολογισμένη στο $t \in \mathbb{R}$ δίνεται από την ολοκλήρωση της $g_t(x) = \exp(tx)$ ως προς την P. Όταν $t=0$, $g_t(x) = 1 \ \forall x$ και επομένως (γιατί;) $M(0) = 1$ όποια και αν είναι η P. Είναι όμως δυνατόν να υπάρχουν $t \in \mathbb{R}$ για τα οποία η $E(\exp(tX))$ να μην υπάρχει (η θετικότητα της εκθετικής συνάρτησης μαζί με σχετικές ιδιότητες του ολοκληρώματος μας λένε ότι κάτι τέτοιο θα συμβαίνει εάν $E(\exp(tX)) = +\infty$ για τα εν λόγω t). Η παρατήρηση αυτή μας οδηγεί στο παρακάτω κριτήριο για το πότε η M θεωρείται καλώς ορισμένη.

Κριτήριο. [Καλώς Ορισμένο της M]. Η M θα θεωρείται καλώς ορισμένη αν η $E(\exp(tX))$ υπάρχει (ως πραγματικός αριθμός), τουλάχιστον για κάθε t σε διάστημα της μορφής $(-t^*, t^*)$, όπου $t^*>0$* (δηλ. σε διάστημα με κέντρο το μηδέν).

Το παραπάνω επί της ουσίας σημαίνει ότι το καλώς ορισμένο ισοδυναμεί ότι η M είναι καλώς ορισμένη συνάρτηση $(-t^*, t^*) \to \mathbb{R}$ (τουλάχιστον) για κάποιο $t^*>0$. Το καλώς ορισμένο συνδέεται άμεσα με τις απαντήσεις που επιζητούμε στα α) και β).

Θεώρημα 1 [Αναπαράσταση]. Η P αναπαρίσταται από την M αν η M είναι καλώς ορισμένη. □

Επομένως έχουμε ότι όταν ισχύει (και μόνο τότε) το παραπάνω κριτήριο τότε το να γνωρίζουμε την M ισοδυναμεί με το να γνωρίζουμε την P. Η απόδειξη του Θεωρήματος 1 είναι εκτός του εύρους του μαθήματος και σχετίζεται με την έννοια που αναφέρεται μετασχηματισμός Laplace (Laplace transform). Το επόμενο αποτέλεσμα μας δίνει απαντήσεις στα α) και β). Αν $k \in \mathbb{N}$, συμβολίζουμε με $M^{(k)}$ την παράγωγο k-τάξης της M, με $M^{(0)}=M$.

Θεώρημα 2 [Ροπές και Ροπογεννήτρια]. Για την P υπάρχουν οι ροπές κάθε τάξης και χαρακτηρίζουν την P αν η M είναι καλώς ορισμένη. Σε αυτή την περίπτωση και μόνο έχουμε $E(X^k) = M^{(k)}(0)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ (*). □

Σχόλια:

1). Αν η M καλώς ορισμένη τότε η ροπή k-τάξης της P ταυτίζεται με την παράγωγο k-τάξης της M στο μηδέν. Προφανώς αυτό μας δείχνει το γιατί χρειαζόμαστε την $E(\exp(tX))$ να υπάρχει σε γειτονιά του μηδενός. Το γιατί αυτό συνεπάγεται την ομαλότητα της M στο 0, και την σχέση των παραγώγων με τις ροπές είναι εκτός του εύρους του μαθήματος, και εν μέρει σχετίζεται με το ανάπτυγμα McLaurin της εκθετικής συνάρτησης. Το (*) μας δίνει απάντηση στο β). Αν η M καλώς ορισμένη μπορούμε να υπολογίζουμε την ροπή k-τάξης παραγωγίζοντας k-φορές την M στο 0. Αυτό γενικά αναφέρα-

* Όταν ισχύει $\forall t^*>0$ θεωρούμε ότι το t^* μπορεί να επιλεγεί ως $+\infty$.

με να είναι υπολογιστικά ευχερέστερο από τον υπολογισμό μέσω ολοκλήρωσης εφόσον γνωρίζουμε την M. Επίσης έχουμε από τα προηγούμενα $M^{(0)}_{(0)} = M(0) =$ $1 = E(X^0)$ όπως αναμέναμε (γιατί;). □

2. Αν η M καλώς ορισμένη τότε μέσω των ροπών και κάποιας διαδικασίας μπορούμε να ανασυνθέσουμε την M. Αυτό συνεπάγεται μέσω του Θεωρήματος 1 το γιατί τότε και μόνο τότε οι ροπές χαρακτηρίζουν την P όπως μας λέει το παραστατικό. □

Παραδείγματα - Υπολογισμοί

1. Εκφυλισμένη κατανομή στο 0.

Έχουμε ότι $\text{supp} = \{0\}$, $P(\{0\}) = 1$ και για $t \in \mathbb{R}$

$$M(t) = E(\exp(tX)) = \sum_{i \in \{0\}} \exp(ti) P(\{i\}) = \exp(t0) \cdot 1 =$$

1. Επομένως η M καλώς ορισμένη (το ε^* μπορεί να επιλεγεί ως $+\infty$) και άρα ισχύουν τα Θεωρήματα 1-2. Συνεπώς

$$E(X^k) = M^{(k)}_{(0)} = \frac{dM^k}{dt^k}\Big|_{t=0} = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k>0 \end{cases}$$ όπως αναμέναμε. □

2. Bernoulli με παράμετρο $q \in (0,1)$ ($\text{Ber}(q)$).

Έχουμε ότι $\text{supp} = \{0,1\}$ με $P(\{0\}) = 1-q$, $P(\{1\}) = q$, και για $t \in \mathbb{R}$

$$M(t) = E(\exp(tX)) = \sum_{i \in \{0,1\}} \exp(ti) P(\{i\}) = \exp(t \cdot 0) P(\{0\}) + \exp(t \cdot 1) P(\{1\})$$

$$= 1 \cdot (1-q) + \exp(t) \cdot q = 1 - q + \exp(t) q = 1 + q(e^t - 1).$$ Επομένως η M είναι καλώς ορισμένη (το ε^* μπορεί να επιλεγεί ως $+\infty$)**. Συνεπώς

$$E(X^k) = M^{(k)}_{(0)} = \frac{dM^k}{dt^k}\Big|_{t=0} = \begin{cases} 1 & k=0 \\ q & k>0 \end{cases}$$ όπως αναμέναμε. □

** Συνεπώς ισχύουν τα Θεωρήματα 1-2.

3. Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n\in\mathbb{N}^*$, $q\in(0,1)$ $(Bin(n,q))$.

Έχουμε ότι $supp=\{0,1,\dots,n\}$, $P(\{i\})=\binom{n}{i}q^i(1-q)^{n-i}$ αν $i\in supp$, και αν $t\in\mathbb{R}$

$$M(t)=E(\exp(tX))=\sum_{i\in\{0,1,\dots,n\}}\exp(ti)P(\{i\})=\sum_{i=0}^{n}\exp(ti)q^i(1-q)^{n-i}$$

$$=\sum_{i=0}^{n}(e^tq)^i(1-q)^{n-i}\overset{(***)}{=}(1-q+e^tq)^n=(1+q(e^t-1))^n,$$ επομένως

η M είναι καλώς ορισμένη (το t^* μπορεί να επιλεγεί ως $+\infty$) και συνεπώς ισχύουν τα θεωρήματα 1-2. Επίσης για $\kappa=1,2$ έχουμε

$$E(X)=M^{(1)}(0)=\frac{dM}{dt}\Big|_{t=0}=n(1+q(e^t-1))^{n-1}\cdot qe^t\Big|_{t=0}=nq.$$

(έστω ότι $n\geq 2$) $$E(X^2)=M^{(2)}(0)=\frac{d^2M}{dt^2}\Big|_{t=0}=n(n-1)(1+q(e^t-1))^{n-2}q^2e^t+M^{(1)}(t)\Big|_{t=0}$$

$$=n(n-1)q^2+nq=n^2q^2+nq(1-q).$$

(κάντε τον υπολογισμό για $n=1$), οπότε για $n\geq 2$

$$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2=n^2q^2+nq(1-q)-(nq)^2=nq(1-q).$$

(Ποια η σχέση μεταξύ της M του προηγούμενου παραδείγματος με αυτή του τρέχοντος;) [Να βρεθούν οι ροπές για $\kappa=3,4$, υποθέστε ότι $n\geq 4$]. □

4. Κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda>0$.

Έχουμε ότι $supp=\mathbb{N}$, $P(\{i\})=e^{-\lambda}\lambda^i/i!$ για $i\in\mathbb{N}$, και αν $t\in\mathbb{R}$

$$M(t)=E(\exp(tX))=\sum_{i\in\mathbb{N}}\exp(ti)P(\{i\})=\sum_{i=0}^{\infty}\exp(ti)e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}=e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}(e^t\lambda)^i/i!$$

$$\overset{(\Delta)}{=}e^{-\lambda}\exp(e^t\lambda)=\exp(e^t\lambda-\lambda)=\exp(\lambda(e^t-1)),$$ επομένως η M είναι καλώς ορισμένη (το t^* μπορεί να επιλεγεί ως $+\infty$) και επομένως ισχύουν τα θεωρήματα 1-2.

Αν $\kappa=1,2$ έχουμε

(***) Θυμηθείτε το διωνυμικό ανάπτυγμα.

(Δ) Θυμηθείτε το ανάπτυγμα McLaurin της εκθετικής συνάρτησης.

$$E(X) = M^{(1)}(0) = \frac{dM}{dt}\Big|_{t=0} = \exp(\lambda(e^t-1))\lambda e^t\Big|_{t=0} = M(t)\lambda e^t\Big|_{t=0}$$
$$= M(0)\lambda e^0 = \lambda.$$

$$E(X^2) = M^{(2)}(0) = \frac{d^2M}{dt^2}\Big|_{t=0} = M'(t)\lambda e^t\Big|_{t=0} + M(t)\lambda e^t\Big|_{t=0}$$
$$= \lambda E(X) + E(X) = (\lambda+1)\lambda.$$

Παρατηρούμε ότι οι παραγωγίσεις είναι δυνατόν να αναδεικνύουν σχέσεις μεταξύ των ροπών που προκύπτουν από την μορφή της M.
Έχουμε ότι $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = (\lambda+1)\lambda - \lambda^2 = \lambda$.
[Να βρεθούν οι ροπές για $k=3,4$]. □

5.16.) Εκθετική Κατανομή με παράμετρο $\lambda>0$ ($Exp(\lambda)$).
Έχουμε ότι $supp = [0,+\infty)$ και $f(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0 \end{cases}$, οπότε για $t\in\mathbb{R}$

$$M(t) = E[\exp(tX)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(tz)f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{0}\exp(tz)\,0\,dz + \int_0^{+\infty}\exp(tz)\lambda e^{-\lambda z}dz$$

$$\underset{(\text{γιατί;})}{=} \lambda\int_0^{+\infty}\exp((t-\lambda)z)\,dz = \begin{cases} \lambda\int_0^{+\infty} dz, & t=\lambda \\ \frac{\lambda}{t-\lambda}\int_0^{-\infty}\exp(u)\,du, & t<\lambda \\ \frac{\lambda}{t-\lambda}\int_0^{+\infty}\exp(u)\,du, & t>\lambda \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} +\infty, & t\geq\lambda \\ \frac{\lambda}{\lambda-t}\int_{-\infty}^0 e^u du, & t<\lambda \end{cases} = \begin{cases} +\infty, & t\geq\lambda \\ \frac{\lambda}{\lambda-t}\left[e^0 - \lim_{z\to-\infty} e^u\right], & t<\lambda \end{cases}$$

$$= \begin{cases} +\infty, & t\geq\lambda \\ \frac{\lambda}{\lambda-t}, & t<\lambda \end{cases}.$$ Παρατηρούμε ότι στο συγκεκριμένο

παράδειγμα το $E(\exp(tX))$ υπάρχει αν $t<\lambda$, αλλά αφού το $\lambda>0$ αυτό είναι επαρκές για την ύπαρξη της M η οποία θεωρείται ως ορισμένη στο $(-\lambda,\lambda)$ (αν δεν είχαμε επιτρέψει στον ορισμό παραπάνω το διάστημα του καλώς ορισμένου της M και είναι συμμετρικό γύρω από το 0 θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι η M είναι καλώς ορισμένη στο $(-\infty,0)$. Επομένως και εδώ ισχύουν τα Θεωρήματα 1-2. Οπότε παρατηρούμε ότι:

αν $k=0$ $\quad E(X^0) = M^{(0)}_{(0)} = M(0) = \dfrac{\lambda}{\lambda-0} = 1$,

$k=1 \quad E(X) = M^{(1)}_{(0)} = -\dfrac{\lambda}{(\lambda-t)^2}(-1)\Big|_{t=0} = \dfrac{1}{\lambda-t}\,\dfrac{\lambda}{\lambda-t}\Big|_{t=0}$

$$= \frac{1}{\lambda-t} M^{(0)}_{(t)}\Big|_{t=0} = \frac{1}{\lambda}E(X^0)$$

$k=2 \quad E(X^2) = M^{(2)}_{(0)} = -\dfrac{2\lambda}{(\lambda-t)^3}(-1)\Big|_{t=0} =$

$$= \frac{2}{(\lambda-t)} M^{(1)}_{(t)}\Big|_{t=0} = \frac{2}{\lambda}E(X)$$

$\vdots$

$$E(X^k) = M^{(k)}_{(0)} = -\frac{k\lambda}{(\lambda-t)^{k+1}}(-1)\Big|_{t=0} = \frac{k}{(\lambda-t)} M^{(k-1)}_{(t)}\Big|_{t=0}$$

$= \dfrac{k}{\lambda}E(X^{k-1})$ για $k\geq 1$ όπως αναμενόταν.

Επομένως οι αναδρομικές σχέσεις μεταξύ ροπών διαδοχικής τάξης που είχαμε διερευνήσει στο εν λόγω παράδειγμα όταν υπολογίζαμε ροπές μέσω ολοκλήρωσης παραγόντων από την μορφή της M που υπαγορεύει το πως συνδέονται μεταξύ τους οι παράγωγοι της των διαφόρων τάξεων στο μηδέν. □

6 (7) Τυπική Κανονική κατανομή $(N(0,1))$

Έχουμε ότι $supp=\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$, οπότε για $t\in\mathbb{R}$

$$M(t) = E(\exp(tX)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\exp(tz)f(z)\,dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(tz-\frac{1}{2}z^2\right)dz =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}(z^2-2tz+t^2)+t^2/2\right)dz = \exp(t^2/2)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(z-t)^2\right)dz$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(z-t)^2\right)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας της $N(t,1)$ και επομένως (γιατί;) έχουμε

$$M(t) = \exp\left(t^2/2\right)$$

η οποία επομένως είναι καλώς ορισμένη (το t^* μπορεί να επιλεγεί ως το ∞) και συνεπώς και εδώ ισχύουν τα θεωρήματα 1-2. Π.χ. για $\kappa=1,2,3,4$ έχουμε ότι

$$E(X) = M^{(1)}_{(0)} = t\exp\left(t^2/2\right)\Big|_{t=0} = tM(t)\Big|_{t=0}$$

$$= 0\cdot M(0) = 0\cdot E(X^0) = 0.$$

$$E(X^2) = M^{(2)}_{(0)} = M(t)\Big|_{t=0} + tM^{(1)}_{(t)}\Big|_{t=0}$$
$$= M(0) + 0\cdot M^{(1)}_{(0)} =$$
$$= E(X^0) + 0\,E(X) = 1.$$

$$E(X^3) = M^{(3)}_{(0)} = M^{(1)}_{(t)}\Big|_{t=0} + M^{(1)}_{(t)}\Big|_{t=0} + tM^{(2)}_{(t)}\Big|_{t=0}$$

$$= 2M^{(1)}_{(t)}\Big|_{t=0} + tM^{(2)}_{(t)}\Big|_{t=0}$$

$$= 2E(X) + 0\,E(X^2) = 0.$$

$$E(X^4) = M^{(4)}_{(0)} = 2\cdot M^{(2)}_{(t)}\Big|_{t=0} + M^{(2)}_{(t)}\Big|_{t=0} + tM^{(3)}_{(t)}\Big|_{t=0}$$

$$= 3\cdot M^{(2)}_{(t)}\Big|_{t=0} + tM^{(3)}_{(t)}\Big|_{t=0}$$

$$= 3\cdot E(X^2) + 0\cdot E(X^3) = 3.$$

Παρατηρούμε ότι και εδώ αναδεικνύονται αναδρομικές σχέσεις μεταξύ ροπών διαφορετικής τάξης που οφείλονται στην συμπεριφορά της M ως προς την παραγώγιση στο 0. □

Είναι δυνατόν να δειχθεί ότι σε παραδείγματα όπως η τυπική κατανομή Cauchy η M δεν είναι καλώς ορισμένη (και επομένως δεν ισχύουν τα θεωρήματα 1-2) επειδή δεν υπάρχουν οι ροπές για κάποιες τάξεις (για την ακρίβεια δεν υπάρχουν για καμμία τάξη μεγαλύτερη ίση του 1). Είναι δυνατόν όμως να βρούμε και παραδείγματα κατανομών για τα οποία υπάρχουν οι ροπές κάθε τάξης, παρόλα αυτά η ροπογεννήτρια δεν είναι καλώς ορισμένη και επομένως ούτε για αυτές ισχύουν τα θεωρήματα 1-2 (αν ενδιαφέρεστε, τέτοιο παράδειγμα είναι αυτό της λογαριθμοκανονικής κατανομής, log-Normal distribution).