

Ομάδα Ασκήσεων 5

Τα παρακάτω βρίσκονται σε στάδιο διαρκούς διόρθωσης. Παρακαλώ αναφέρετε όποια παραδρομή στο stelios@aueb.gr ή στο e-class του μαθήματος.

1. Έστω X_1, X_2, \dots, X_n iid τυχαίες μεταβλητές με $X_1 \sim N(\mu_0, v_0)$, όπου το $\mu_0 \in \mathbb{R}$ **άγνωστο**, ενώ το $v_0 > 0$ **γνωστό**. Να εξαχθεί ο MLE (μ_0). Είναι αμερόληπτος εκτιμητής του μ_0 ; Να βρεθεί η διακύμανση του. Να δειχθεί ότι είναι (ασθενώς) συνεπής εκτιμητής του μ_0 .
2. Έστω X_1, X_2, \dots, X_n iid τυχαίες μεταβλητές με $X_1 \sim N(\mu_0, v_0)$, όπου το $\mu_0 \in \mathbb{R}$ **γνωστό** ενώ το $v_0 > 0$ **άγνωστο**. Να εξαχθεί ο MLE (v_0). Είναι αμερόληπτος εκτιμητής του v_0 ; Να βρεθεί η διακύμανση του. Να δειχθεί ότι είναι (ασθενώς) συνεπής εκτιμητής του v_0 .
3. Για την αμέσως προηγούμενη άσκηση να εξαχθεί ο MLE ($\exp(\mu_0)$). Να δειχθεί ότι όταν $n = 1$ είναι μεροληπτικός εκτιμητής του $\exp(\mu_0)$;
4. Έστω X_1, X_2, \dots, X_n iid τυχαίες μεταβλητές με, $n \geq 2$, $X_1 \sim N(\mu_0, v_0)$, όπου τα $\mu_0 \in \mathbb{R}$ και $v_0 > 0$ **άγνωστα**. Να δειχθεί ότι ο

$$\hat{\theta}_n := \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(1 + \frac{c}{n-1}\right) \mu_n^2 \right),$$

όπου $\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ και $c \in \mathbb{R}$, είναι αμερόληπτος εκτιμητής του $\theta_0 := \begin{pmatrix} \mu_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ αν και μόνο αν $c = 1$.