Φροντιστήριο 5

Υπολογισμός Πιθανοτήτων με χρήση της αθροιστικής συνάρτησης πιθανότητας (F)

Ο ορισμός της F είναι

- $F(x) := (-\infty, x]$

Επιπλέον η F έχει την ακόλουθη ιδιότητα

- $\lim\limits_{y \to x^-} F(y) = P(-\infty, x)$

Απο τα παραπάνω προκύπτει οτι (γιατι ;)

- $P(\{x\}) = F(x) - \lim\limits_{y \to x^-} F(y)$
- $P(\alpha, \beta] = F(\beta) - F(\alpha)$
- $P(\alpha, \beta) = \lim\limits_{x \to \beta^-} F(x) - F(\alpha)$
- $P[\alpha, \beta] = F(\beta) - \lim\limits_{x \to \alpha^-} F(x)$
- $P[\alpha, \beta) = \lim\limits_{x \to \beta^-} F(x) - \lim\limits_{x \to \alpha^-} F(x)$

Όταν τα α, β είναι σημεία συνέχειας, τότε

$$P(\alpha, \beta] = P(\alpha, \beta) = P[\alpha, \beta] = P[\alpha, \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$$

Πόρισματα

1. Η F συνεχής στο x ανν P({x})=0
(Η F ασυνεχής στο x ανν $P(\{x\}) \neq 0$)
2. Αν P διακριτή τότε F ασυνεχής στο x ανν $x \in \operatorname{supp} P$

Άσκηση 1

Δίνεται η

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & , x \geq 1 \end{cases}$$

1) Να δειχθεί οτι η παραπάνω είναι συνάρτηση πυκνότητας

2) Να υπολογισθεί η $P(x \leq 4)$

3)Να βρεθεί η αθροιστική συνάρτηση

Απάντηση

1) Θα πρέπει $f(x) \geq 0, \forall x$ και $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Έχουμε πως :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{+\infty} f(x)dx = 0 + \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{1} = 1$$

και

$f(x) \geq 0, \forall x$

2) Γνωρίζουμε πως :

$$P\left(\left[\alpha,\beta\right]\right) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

Άρα :

$$P\left(\left[X \leq 4\right]\right) = P\left((-\infty,4]\right) = \int_{-\infty}^{4} f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{4} f(x)dx = 0 + \int_{1}^{4} \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^4 = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$$

3) Γνωρίζουμε πως :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις :

$$A\nu\ x < 1,\ F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz = \int_{-\infty}^{x} 0dz = 0$$

$$A\nu\ x \geq 1,\ F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz = \int_{-\infty}^{1} f(z)dz + \int_{1}^{x} f(z)dz = 0 + \left[-\frac{1}{z}\right]_1^x = -\frac{1}{x} + \frac{1}{1} = 1 - \frac{1}{x}$$

Συνεπώς :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ,x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x} & ,x \geq 1 \end{cases}$$

Άσκηση 2

Δίνεται η

$$f(x)=\begin{cases} Cx^2 & , 0<x<3 \\ 0 & , \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

1) Βρείτε το C ώστε η f να είναι συνάρτηση πυκνότητας

2) Βρείτε την αθροιστική συνάρτηση, F

Απάντηση

1) Θα πρέπει $C \in R\ :\ f(x) \geq 0, \forall x$ και $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Συνεπώς πρέπει :

$$Cx^2 \geq 0 \Rightarrow C \geq 0$$

και

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow 0 + \int_{0}^{3} f(x)dx + 0 = 1$$

$$\Leftrightarrow \int_{0}^{3} Cx^2 dx = 1 \Leftrightarrow \left[C\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{9} > 0$$

2) Γνωρίζουμε πως :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις :

$$A\nu\ x < 0,\ F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz = \int_{-\infty}^{x} 0dz = 0$$

$$A\nu\ 0 \leq x \leq 3,\ F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz = \int_{-\infty}^{0} f(z)dz + \int_{0}^{x} f(z)dz = 0 + \int_{0}^{x} \frac{z^2}{9} dz =$$

$$\left[\frac{z^3}{27}\right]_0^x = \frac{x^3}{27}$$

$$Αν\ x>3,\ F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(z)dz=\int_{-\infty}^{0} f(z)dz+\int_{0}^{3} f(z)dz+\int_{3}^{x} f(z)dz=0+\int_{0}^{3}\frac{z^2}{9}dz+0=$$

$$\left[\frac{z^3}{27}\right]_0^3=\left[\frac{x^3}{27}\right]_0^3=\frac{3^3}{27}-0=1$$

Συνεπώς η αθροιστική συνάρτηση είναι :

$$F(x)=\begin{cases}0 & ,x<0\\ \dfrac{x^3}{27} & ,0\le x\le 3\\ 1 & ,x>3\end{cases}$$

Άσκηση 3

Έστω τυχαία μεταβλητή Χ~ exp (1) με $g:R\to R\ g(x)=a^x$ όπου 0 <α<e. Βρείτε την αναμενόμενη τιμή της gως προς την κατανομή της Χ. Δίνεται η pdfτης εκθετικής κατανομής

$$f(x;\lambda)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & ,x\ge 0\\ 0 & ,x<0\end{cases}$$

Λύση

Έχουμε :

$$E(a^x)=\int_{-\infty}^{\infty} a^x f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{\infty} a^x e^{-x}dx=-\int_{0}^{\infty} a^x(-e^{-x})dx$$

$$=-\int_{0}^{\infty} a^x(e^{-x})'dx=-a^xe^{-x}]_0^{\infty}+\int_{0}^{\infty}(a^x)'e^{-x}dx=-\left(\frac{a}{e}\right)^x\Bigg]_0^{\infty}+\int_{0}^{\infty} a^x(e^{-x})dx$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a}{e}\right)^x+\left(\frac{a}{e}\right)^0+\int_{0}^{\infty} a^x\ln a(e^{-x})dx\overset{Γιατί;}{=}1+\ln a\int_{0}^{\infty} a^xe^{-x}dx=1+\ln aE(a^x)$$

$$E(a^x)=\frac{1}{1-\ln a}$$