ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ 1

Αντίστροφη Εικόνα

Έστω συνάρτηση $f : \Omega \to \Re$ τότε ορίζεται η αντίστροφη εικόνα μέσω της f του Α ως το σύνολο των σημείων του Ω τα οποία απεικονίζονται μέσω της f στο Α.

Δηλαδή

$$f^{-1}(\mathrm{A}) = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in \mathrm{A}\}$$

Παράδειγμα

Έστω $\Omega = \Re$ και $f(x) = x^2$

$$f^{-1}(\{0\}) = \{\omega \in \Re : f(\omega) = 0\} = \{\omega \in \Re : \omega^2 = 0\} = \{0\}$$

$$f^{-1}(\{1\}) = \{\omega \in \Re : f(\omega) = 1\} = \{\omega \in \Re : \omega^2 = 1\} = \{-1, 1\}$$

$$f^{-1}([1,4]) = \{\omega \in \Re : f(\omega) \in [1,4]\} = \{\omega \in \Re : 1 \le \omega^2 \le 4\} = [1,2] \bigcup [-2,-1]$$

$$f^{-1}(-\infty, 0) = \{\omega \in \Re : f(\omega) \in (-\infty, 0)\} = \{\omega \in \Re : \omega^2 < 0\} = \varnothing$$

$$f^{-1}(\Re) = \{\omega \in \Re : f(\omega) \in \Re\} = \{\omega \in \Re : \omega^2 \in \Re\} = \Re$$

$$f^{-1}(\varnothing) = \{\omega \in \Re : f(\omega) \in \varnothing\} = \{\omega \in \Re : \omega^2 \in \varnothing\} = \varnothing$$

Άσκηση

Έστω χώρος πιθανότητας $(\Omega, \Sigma_\Omega, \mathrm{P}_\Omega)$, μετρήσιμος χώρος $(□, \Sigma_□)$ και συνάρτηση $\mathrm{X} : \Omega \to □$ όπου :

- $\Omega = \{a, b, c\}$,

- $P_\Omega(\{a\}) = p$ και $P_\Omega(\{b\}) = q$ όπου $p, q \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$
- $X(\omega) = \begin{cases} 1 \ \alpha\nu \ \omega = a \\ 2 \ \alpha\nu \ \omega = b \\ 3 \ \alpha\nu \ \omega = c \end{cases}$

1. Βρείτε το Σ_Ω.
2. Εάν τα a,b,c είναι ξένα μεταξύ τους, βρείτε το $P_\Omega(\{c\})$ ώστε η συνολοσυνάρτηση P_Ω να είναι μέτρο πιθανότητας.
3. Δείξτε ότι η X είναι τυχαία μεταβλητή.
4. Βρείτε το μέτρο P_X που προκύπτει από τη μεταφορά του P_Ω μέσω της X.
5. Βρείτε το στήριγμα $\operatorname{supp} P_X$ του μέτρου P_X. Τι συμπέρασμα βγάζετε για την κατανομή;
6. Τώρα ορίστε την πραγματική συνάρτηση $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ όπου

   $$\mathrm{Y}(\omega) = \begin{cases} 1 \ \alpha\nu \ \omega = a \\ 2 \ \alpha\nu \ \omega = b \\ 2 \ \alpha\nu \ \omega = c \end{cases}$$

   και ανάλογα α)δείξτε ότι είναι τυχαία μεταβλητή, β)βρείτε το μέτρο P_Y που προκύπτει από μεταφορά και γ) το στήριγμα αυτού.

Απάντηση

1. Αφού το Ω είναι πεπερασμένο, κάθε υποσύνολό του θα είναι μετρήσιμο, συνεπώς το Σ_Ω θα είναι το δυναμοσύνολό του:

   $\Sigma_\Omega = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \Omega\}$
2. Από τον ορισμό του μέτρου πιθανότητας, για να είναι το P_Ω μέτρο πιθανότητας θα πρέπει να ισχύει $P_\Omega(\Omega) = 1$. Αλλά

$\Omega=\{a,b,c\}=\{a\}\bigcup\{b\}\bigcup\{c\}$. Άρα, από τον ορισμό θα ισχύει

$P_\Omega(\Omega)=P_\Omega(\{a\})+P_\Omega(\{b\})+P_\Omega(\{c\})=1\Rightarrow P_\Omega(\{c\})=1-p-q>0$

3. Σύμφωνα με τον ορισμό η $\mathrm{X}:\Omega\to\mathbb{R}$ θα είναι τυχαία μεταβλητή ανν

   $\forall \mathrm{A}\in\Sigma_{\mathbb{R}}\,,\mathrm{X}^{-1}(\mathrm{A})\in\Sigma_\Omega$

   Επομένως, για $\forall \mathrm{A}\in\Sigma_{\mathbb{R}}$ έχουμε :

$$\mathrm{X}^{-1}(\mathrm{A})=\{\omega:X(\omega)\in\mathrm{A}\}=\begin{cases}\varnothing\ \alpha\nu\ \mathrm{A}\bigcap\{1,2,3\}=\varnothing\\ \Omega\ \alpha\nu\ \mathrm{A}\bigcap\{1,2,3\}=\{1,2,3\}\\ \{a\}\ \alpha\nu\ \mathrm{A}\bigcap\{1,2,3\}=\{1\}\\ \{b\}\ \alpha\nu\ \mathrm{A}\bigcap\{1,2,3\}=\{2\}\\ \{c\}\ \alpha\nu\ \mathrm{A}\bigcap\{1,2,3\}=\{3\}\\ \{a,b\}\ \alpha\nu\ \mathrm{A}\bigcap\{1,2,3\}=\{1,2\}\\ \{a,c\}\ \alpha\nu\ \mathrm{A}\bigcap\{1,2,3\}=\{1,3\}\\ \{b,c\}\ \alpha\nu\ \mathrm{A}\bigcap\{1,2,3\}=\{2,3\}\end{cases}$$

4. Το μέτρο από μεταφορά, P_X, ορίζεται ως εξής :

   $P_X(A):=P_\Omega(\mathrm{X}^{-1}(\mathrm{A})),\ \forall \mathrm{A}\in\Sigma_{\mathbb{R}}$

   Επομένως

$$P_X(\mathrm{A})=\begin{cases}0 & \alpha\nu\ \mathrm{A}\bigcap\{1,2,3\}=\varnothing\\ 1 & \alpha\nu\ \mathrm{A}\bigcap\{1,2,3\}=\{1,2,3\}\\ p & \alpha\nu\ \mathrm{A}\bigcap\{1,2,3\}=\{1\}\\ q & \alpha\nu\ \mathrm{A}\bigcap\{1,2,3\}=\{2\}\\ 1-p-q & \alpha\nu\ \mathrm{A}\bigcap\{1,2,3\}=\{3\}\\ p+q & \alpha\nu\ \mathrm{A}\bigcap\{1,2,3\}=\{1,2\}\\ 1-q & \alpha\nu\ \mathrm{A}\bigcap\{1,2,3\}=\{1,3\}\\ 1-p & \alpha\nu\ \mathrm{A}\bigcap\{1,2,3\}=\{2,3\}\end{cases}$$

5. Από το προηγούμενο ερώτημα, σε $\forall \mathrm{A}\in\Sigma_{\mathbb{R}}$ για το οποίο ισχύει $\mathrm{A}\bigcap\{1,2,3\}$ αποδίδεται μοναδιαία πιθανότητα. Επομένως το μικρότερο τέτοιο σύνολο είναι το $\{1,2,3\}$ το οποίο είναι κλειστό (γιατι;). Άρα $\operatorname{supp}P_\mathrm{X}=\{1,2,3\}$

6. α) Σύμφωνα με τον ορισμό η $\mathrm{Y}:\Omega\to\mathbb{R}$ θα είναι τυχαία μεταβλητή ανν

   $\forall \mathrm{A}\in\Sigma_{\mathbb{R}}\,,\mathrm{Y}^{-1}(\mathrm{A})\in\Sigma_\Omega$

   Επομένως, για $\forall \mathrm{A}\in\Sigma_{\mathbb{R}}$ έχουμε :

$$\mathrm{Y}^{-1}(\mathrm{A}) = \left\{\omega : \mathrm{Y}(\omega) \in \mathrm{A}\right\} = \begin{cases} \varnothing & \alpha\nu \ \mathrm{A} \bigcap \left\{1,2\right\} = \varnothing \\ \Omega & \alpha\nu \ \mathrm{A} \bigcap \left\{1,2\right\} = \left\{1,2\right\} \\ \{a\} & \alpha\nu \ \mathrm{A} \bigcap \left\{1,2\right\} = \{1\} \\ \{b,c\} & \alpha\nu \ \mathrm{A} \bigcap \left\{1,2\right\} = \{2\} \end{cases}$$

Άρα $\mathrm{Y}^{-1}(\mathrm{A}) \in \Sigma_{\Omega}, \forall A \in \Sigma_{\square}$ που σημαίνει ότι η Y είναι τυχαία μεταβλητή.

β) Το μέτρο από μεταφορά, P_{Y}, ορίζεται ως εξής:

$P_Y(A) := P_Y(Y^{-1}(A))$ όπου $\mathrm{A} \in \Sigma_{\square}$

Επομένως

$$P_Y(\mathrm{A}) = \left\{\omega : \mathrm{Y}(\omega) \in \mathrm{A}\right\} = \begin{cases} 0 & \alpha\nu \ \mathrm{A} \bigcap \left\{1,2\right\} = \varnothing \\ 1 & \alpha\nu \ \mathrm{A} \bigcap \left\{1,2\right\} = \left\{1,2\right\} \\ p & \alpha\nu \ \mathrm{A} \bigcap \left\{1,2\right\} = \{1\} \\ q & \alpha\nu \ \mathrm{A} \bigcap \left\{1,2\right\} = \{2\} \end{cases}$$

γ) Αναλόγως με πριν: $\operatorname{supp} P_Y = \{1,2\}$