Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων

Εισαγωγή

Η Θεωρία πιθανοτήτων αφορά στην μελέτη των κατανομών (ή μέτρων πιθανότητας) και των "μετασχηματισμών" μεταξύ αυτών (πβλ. την έννοια της τυχαίας μεταβλητής, κ.ο.κ.).

Οι κατανομές πιθανότητας είναι διαδικασίες (δηλ. συναρτήσεις) που αποδίδουν έννοιες μεγέθους στα ενδεχόμενα που υπολογίζονται. Τα μεγέθη αυτά ερμηνεύονται ως αναπαραστάσεις της αβεβαιότητας των ενδεχομένων αυτών. Εξαιτίας της ερμηνείας αυτής, και όπως έχουμε ήδη επισημάνει, η θεωρία πιθανοτήτων σχετίζεται με την στατιστική επαγωγή, αλλά και με όποιο μέρος της οικονομικής θεωρίας εμπεριέχει υπόβαθρο αβεβαιότητας (π.χ. η θεωρία της λήψεως αποφάσεων σε συνθήκες αβεβαιότητας στα πλαίσια της μικροοικονομικής θεωρίας, η χρηματοοικονομική θεωρία, κ.ο.κ.). Συνεπώς το Α. Μέρος του μαθήματος που άπτεται της μελέτης στοιχείων της θεωρίας πιθανοτήτων, θα είναι προφανώς χρήσιμο και στα πλαίσια μαθημάτων οικονομικής θεωρίας.

Πέραν της προφανούς ερμηνείας, μια κατανομή πιθανότητας προσομοιάζει με άλλες (οικείες) διαδικασίες απόδοσης μεγέθους σε σύνολα όπως το μήκος, ή το εμβαδό, ή ο όγκος. Επομένως η θεωρία πιθανοτήτων αποτελεί μέρος του κλάδου της μαθηματικής ανάλυσης που ασχολείται με διαδικασίες απόδοσης μεγέθους σε σύνολα και ονομάζεται θεωρία μέτρου (Measure Theory).

Ως μέτρα λοιπόν αναμένουμε ότι οι κατανομές πιθανότητας θα είναι συναρτήσεις που παίρνουν πραγματικές τιμές και ορίζονται σε συλλογές από σύνολα (συνολοσυναρτήσεις - set functions), ενώ ικανοποιούν ιδιότητες που είναι συμβατές (ή και επεκτείνουν) με την διαίσθηση που έχουμε για τις διαδικασίες μέτρησης. Αναφέραμε επίσης ότι όταν το πεδίο ορισμού τους (που από τα παραπάνω θα είναι κατάλληλη συλλογή από σύνολα) είναι δύσκολο να περιγραφθεί, τότε ο ορισμός της κατανομής πιθανότητας θα είναι δύσκολο να χρησιμοποιηθεί προκειμένου να εξετάσουμε παραδείγματα. Οπότε και θα καταστεί αναγκαία η αναπαράσταση της κατανομής πιθανότητας από πιο "οικείες" και εύχρηστες έννοιες.

Ένα μεγάλο λοιπόν κομμάτι του πρώτου μέρους του μαθήματος θα αφορά στην κατασκευή τέτοιων αναπαραστάσεων, με αποκορύφωμα την αναπαράσταση οποιασδήποτε κατανομής πιθανότητας ως κατάλληλης διαδικασίας ολοκλήρωσης για κατάλληλες πραγματικές συναρτήσεις (προφανώς αυτό σχετίζεται με το ότι τα ολοκληρώματα Riemann είναι δυνατόν να αποδίδουν εμβαδά).

Κάποια Στοιχεία της Θεωρία Συνόλων

Εφόσον οι κατανομές πιθανότητας είναι συναρτήσεις που ορίζονται σε συλλογές συνόλων, και εφόσον οι τελευταίες μπορούν να εφοδιαστούν με συνολοθεωρητικές πράξεις (π.χ. ενώσεις, τομές, κ.ο.κ.) μας ενδιαφέρει το πώς "αλληλεπιδρούν" οι ιδιότητες των κατανομών με αυτές τις πράξεις εντός των συλλογών, σε σχέση πάντοτε με την διαίσθηση που έχουμε για τις διαδικασίες μέτρησης. Προκειμένου να μπορέσουμε να περιγράψουμε το πεδίου ορισμού και τις ιδιότητες κατανομής πιθανότητας μας χρειάζονται οι παρακάτω βοηθητικές έννοιες που άμεσα στα άλλα αφορούν σε διαμερίσεις συνόλων ως ενώσεις ξένων μεταξύ του υποσυνόλων και του πλήθους αυτών.

Στα παρακάτω, έστω Ω σύνολο αναφοράς (ή καθολικό σύνολο - universal set) (σε μετέπειτα χρόνο θα αντιστοιχίσουμε τις τυπικές γενικότερες ορολογίες με τις ειδικότερες που χρησιμοποιήθηκαν στο προγενέστερο μάθημα). Θα υποθέτουμε ότι το $\Omega \neq \emptyset$ (στον ορισμό της κατανομής πιθανότητας θα γίνει ευνόητο γιατί χρειάζεται αυτός ο περιορισμός).

Υποθέτουμε ότι είναι γνωστή η έννοια του υποσυνόλου. Δεδομένου αυτού θεωρείται ως καλώς ορισμένη η έννοια της συλλογής από όλα τα υποσύνολα του Ω. Τα παρακάτω είναι παραδείγματα από σύνολα αναφοράς, μαζί με τις ανάλογες συλλογές.

i. $\Omega = \{\alpha\}$, $\{\Omega, \emptyset\}$

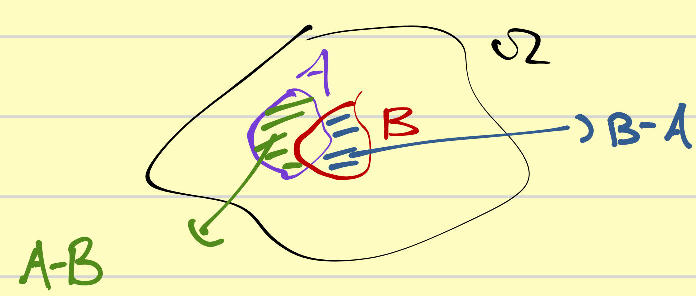
ii. $\Omega = \{\alpha, \beta\}$, $\{\Omega, \emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}\}$

iii. $\Omega = \mathbb{R}$ παρατηρούμε ότι σε αυτή την περίπτωση δεν είναι δυνατόν να απαριθμήσουμε αυτή την συλλογή, παρόλο που είναι καλώς ορισμένη, εξαιτίας της περιπλοκότητας του συνόλου αναφοράς.

Είναι προφανές ότι σε κάθε περίπτωση η εν λόγω συλλογή θα περιλαμβάνει το Ω και το $\emptyset$ (γιατί;). Επίσης χρειάζεται προσοχή ώστε να μην συγχέουμε τα στοιχεία του Ω με τα υποσύνολά του. Π.χ. στα i, ii, $\alpha \in \Omega$ αλλά $\{\alpha\} \subseteq \Omega$

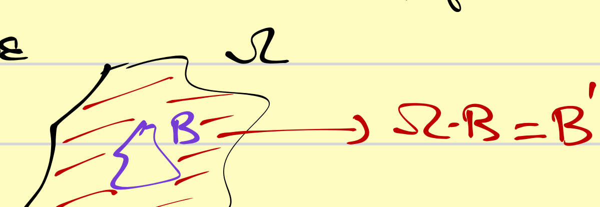
Η συλλογή είναι εφοδιασμένη με συνολοθεωρητικές πράξεις, εκ των οποίων αυτές της ένωσης και της τομής θεωρούνται γνωστές. Τις συμπληρώνουμε με την έννοια της συνολοθεωρητικής διαφοράς (set-theoretic difference):

Αν $A, B \subseteq \Omega$ τότε $A - B = \{x \in A \text{ και } x \notin B\}$ δηλ. το $A-B$ είναι το υποσύνολο του Ω (και άρα μέλος της συλλογής των υποσυνόλων του) που αποτελείται από τα στοιχεία του A που δεν βρίσκονται στο B.



Από την συνολοθεωρητική διαφορά προκύπτει άμεσα η έννοια του συμπληρώματος. Αν στο παραπάνω θέσουμε ως $A = \Omega$ αποκτούμε

$$\Omega - B = \{x \in \Omega \text{ κ' } x \notin B\} = B'$$



Ενώ από το παραπάνω παίρνουμε άμεσα την παρακάτω διαμέριση (δηλ. ξένη ένωση) του Ω,

$$\forall B\subseteq\Omega,\quad \Omega = B\cup B'. \qquad (*)$$

Μια δεύτερη χρήσιμη ταυτότητα είναι η εξής: Αν $A,B\subseteq\Omega$ τότε σε κάθε περίπτωση το A διαμερίζεται ως

$$A = (A\cap B)\cup(A\cap B') \qquad (**)$$

[Παρατηρήστε ότι αν θέσουμε $x=A$, $y=B$, $1-y=B'$, $\cup=+$, $\cap=\cdot$ τότε η (**) μπορεί να γραφεί ως $x=(x\cdot y)+(x\cdot(1-y)) = x\,(y+(1-y)) = x$, κάτι το οποίο "υπαινίσσεται" ότι η "αλγεβρική δομή" των συνολοθεωρητικών πράξεων μοιάζει σε κάποιες περιπτώσεις με την άλγεβρα στο $\mathbb{R}$, κάτι το οποίο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε προκειμένου να κατανοήσουμε τις παραπάνω ταυτότητες, αλλά και να βγάλουμε άλλες].

Πληθικότητες

Μας είναι εμφανές (;) το πότε ένα σύνολο ονομάζεται πεπερασμένο. Περαιτέρω είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι το μικρότερο πλήθος απειροσυνόλου είναι το $\mathbb{N}$, όπως και το ότι υπάρχουν απειροσύνολα με μεγαλύτερο πλήθος στοιχείων από το $\mathbb{N}$ (π.χ. το $\mathbb{R}$). Όταν το πλήθος είναι πεπερασμένο ή ίσο με αυτό του $\mathbb{N}$ θα ονομάζεται "μικρό" ή αριθμήσιμο (countable). Σε κάθε άλλη περίπτωση θα ονομάζεται "μεγάλο" ή μη αριθμήσιμο (uncountable). [Προφανώς η εξαντλητική περιγραφή των

Ενίοτε αυτό εκφεύγει των ορίων του μαθήματος, σε ότι θα μας χρειαστεί είτε θα μας δίνεται είτε θα είναι εμφανής η παραπάνω διάκριση της πληθικότητας]. Επισημαίνεται ότι οι παραπάνω συνολοθεωρητικές πράξεις γενικεύονται τουλάχιστον σε μικρά πλήθη.

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί η συλλογή των υποσυνόλων του $\Omega=\emptyset$.
2. Όπως στην 1, για το $\Omega=\{\alpha,\beta,\gamma\}$.
3. » » » » $\Omega=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$.
4. Βάσει των παραπάνω, αν το Ω είναι πεπερασμένο και έχει πλήθος $n\in\mathbb{N}$ με τι νομίζετε ότι θα ισούται το πλήθος των στοιχείων της συλλογής των υποσυνόλων του.
5. (De-Morgan) Αν $A,B\subseteq\Omega$, δείξτε ότι $(A\cup B)'=A'\cap B'$ και $(A\cap B)'=A'\cup B'$.
6. Πώς γίνεται η (**) όταν $A\subseteq B$;
7. Θέτοντας $\Omega=1$ και $\emptyset=0$ (μόνο συμβολικά) ποια αλγεβρική ταυτότητα σας θυμίζει η (*);
8. Αν $A,B\subseteq\Omega$ και $A\subseteq B$, δείξτε ότι $B=A\cup(B-A)$ όπου $A\cap(B-A)=\emptyset$ (μια ακόμα διαμέριση που είδαμε στην τάξη). (Χρησιμοποιήστε απλώς διάγραμμα Venn).
9. Πότε (και μόνο πότε) $A-B=\emptyset$;