Δεσμευμένη Πιθανότητα και Ανεξαρτησία Ενδεχομένων

Τα παρακάτω βρίσκονται σε στάδιο διαρκούς διόρθωσης και δεν υποκαθιστούν τις διαλέξεις. Παρακαλώ αναφέρετε όποια παραδρομή στο stelios@aueb.gr ή στο e-class του μαθήματος.

Στέλιος Αρβανίτης

Δεσμευμένη Πιθανότητα

Έστω χώρος πιθανότητας $(\Omega, \Sigma_\Omega, \mathbb{P})$ και $B \in \Sigma_\Omega$, με $\mathbb{P}(B) > 0$, δηλαδή το B δεν είναι αμελητέο. Θυμηθείτε ότι τα στοιχεία του Σ_Ω, δηλαδή τα μετρήσιμα υποσύνολα του Ω ερμηνεύονται και ως (σύνθετα) ενδεχόμενα τυχαίου πειράματος. Το ερώτημα που προκύπτει δεδομένης αυτής της ερμηνείας είναι το πως σχετίζονται πληροφοριακά (ως προς την $\mathbb{P}$) τα ενδεχόμενα με το δεδομένο B, δηλαδή το αν είναι δυνατόν η "παρατήρηση" του B να επηρεάζει την πιθανότητα που αποδίδεται σε όποιο ενδεχόμενο. Βάσει αυτού του ερωτήματος, ο περιορισμός του B στο να είναι μη-αμελητέο είναι εύλογος καθώς όποιο ενδεχόμενο μηδενικής ($\mathbb{P}$-) πιθανότητας, δεν φαίνεται να μπορεί να περιέχει πληροφορία για τα υπόλοιπα. Επισημαίνοντας ότι τα παρακάτω εξαρτώνται και από την υφιστάμενη κατανομή $\mathbb{P}$, έχουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός. Για όποιο $A \in \Sigma_\Omega$, ως ($\mathbb{P}$-) δεσμευμένη ως προς το B πιθανότητα του A ορίζεται η

$$\mathbb{P}(A/B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}. \tag{1}$$

Παράδειγμα. Έστω ότι $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$ με Σ_Ω την συλλογή από όλα τα υποσύνολα του Ω (βρείτε τα!). Έστω ότι η $\mathbb{P}$ ορίζεται από τις σχέσεις $\mathbb{P}(\{HH\}) = \mathbb{P}(\{HT\}) = \mathbb{P}(\{TH\}) = \mathbb{P}(\{TT\}) = \frac{1}{4}$ (βρείτε την $\mathbb{P}$!). Εστω ότι $B = \{HH, TH, HT\}$ και $A = \{HH\}$. Οπότε $A \cap B = \{HH\}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{HH\}) = \frac{1}{4}$, και $\mathbb{P}(B) \overset{\text{αριθμ. προσθ.}}{=} \mathbb{P}(\{HH\}) + \mathbb{P}(\{HT\}) + \mathbb{P}(\{TH\}) = \frac{3}{4}$. Συνεπώς,

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}.$$

Σημείωση 1. Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $\mathbb{P}(\cdot/B)$ είναι μια καλώς ορισμένη κατανομή πιθανότητας στον Ω, επειδή ακριβώς η $\mathbb{P}(\cdot)$ είναι καλώς ορισμένη και $\mathbb{P}(B) > 0$. Μάλιστα η διαίρεση με το $\mathbb{P}(B)$ εξυπηρετεί ακριβώς στο να έχει την ιδιότητα της τυποποίησης.

Πόρισμα 1. Για κάθε $A \in \Sigma_\Omega$, με $A \subseteq B$, $\mathbb{P}(A/B) \geq \mathbb{P}(A)$.

Απόδειξη. Αφού (γιατί;) $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B)$, έχουμε ότι

$$\frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A/B)$$

και το αποτέλεσμα έπεται από το ότι $\mathbb{P}(B) \leq 1$ (γιατί;).□

Σημείωση 2. Το παραπάνω είναι δυνατόν να μην ισχύει όταν δεν ισχύει η παραπάνω σχέση εγκλεισμού. Π.χ. στο παράδειγμα παραπάνω θεωρήστε ότι $A = \{HT, TH, TT\}$ οπότε $\mathbb{P}(A|B) = \frac{2}{3} < \frac{3}{4} = \mathbb{P}(A)$.

Πόρισμα 2. Όταν $\mathbb{P}(B) = 1$, τότε $\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A)$.

Απόδειξη. Αφού (γιατί;) $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B')$, $\mathbb{P}(A \cap B') \leq \mathbb{P}(B') = 1 - \mathbb{P}(B) = 0$, τότε $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B)$ και το αποτέλεσμα έπεται από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας.□

Σημείωση 3. Το παραπάνω μας λέει ότι όταν το B είναι ($\mathbb{P}$-) αρκετά μεγάλο, δηλαδή ($\mathbb{P}$-) πλήρους πιθανότητας, τότε δεν προσφέρει ($\mathbb{P}$-) περαιτέρω πληροφορία για όποιο άλλο ενδεχόμενο.

Πόρισμα 3. Όταν $\mathbb{P}(A) = 1$, τότε $\mathbb{P}(A/B) = 1$, και όταν $\mathbb{P}(A) = 0$, τότε $\mathbb{P}(A/B) = 0$.

Απόδειξη. $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A)$, οπότε όταν $\mathbb{P}(A) = 0$ τότε $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ και συνεπώς $\mathbb{P}(A/B) = 0$. Το υπόλοιπο προκύπτει από την συμπληρωματική δεσμευμένη πιθανότητα.□

Σημείωση 4. Δηλαδή η ιδιότητα κάποιου ενδεχομένου να είναι ($\mathbb{P}$-) πλήρες (($\mathbb{P}$-) αμελητέο) δεν αλλοιώνεται από την δέσμευση .

Ανεξαρτησία Ενδεχομένων

Ορισμός (A1). Δύο μη ($\mathbb{P}$-) αμελητέα ενδεχόμενα, $A, B \in \Sigma_\Omega$, θα ονομάζονται ($\mathbb{P}$-) ανεξάρτητα ανν (αν και μόνο αν)

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A).$$

Σημείωση 5. Ο ορισμός συνεπάγεται επίσης ότι $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$, αφού $\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B\cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} \overset{\text{ανεξ.}}{=} \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B)$, οπότε η έννοια μπορεί να ερμηνευθεί ως *μη ($\mathbb{P}$-) πληροφοριακότητα* του ενός ως προς το άλλο και αντίστροφα.

Παράδειγμα. Δείτε το Πόρισμα 2 και την Σημείωση 3.

Πόρισμα 4. (Κανόνας Γινομένου). Τα A και B θα είναι ($\mathbb{P}$-) ανεξάρτητα ανν,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,.$$

Απόδειξη. Έχουμε ότι $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A)$ οπότε το αποτέλεσμα έπεται από τον ορισμό A1 της ανεξαρτησίας.□

Ο κανόνας του γινομένου μας επιτρέπει να ορίσουμε την έννοια ακόμη και σε περιπτώσεις που το ένα ή/και το άλλο ενδεχόμενο είναι ($\mathbb{P}$-) αμελητέα. Οπότε αποκτούμε τον δεύτερο και γενικότερο ορισμό.

Ορισμός (A2). Δύο ενδεχόμενα, $A, B \in \Sigma_\Omega$, θα ονομάζονται ($\mathbb{P}$-) ανεξάρτητα ανν

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,.$$

Πόρισμα 5. Αν $\mathbb{P}(B) = 0$, τότε τα A και B θα είναι ($\mathbb{P}$-) ανεξάρτητα.

Απόδειξη. Έχουμε ότι $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B) = 0 = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$.□

Σημείωση 6. Σε συνδυασμό με το Πόρισμα 2, το παραπάνω μας λέει ότι τα ($\mathbb{P}$-) αμελητέα ή ($\mathbb{P}$-) πληρους πιθανότητας ενδεχόμενα δεν είναι ($\mathbb{P}$-) πληροφοριακά για όποιο ενδεχόμενο, ενώ είναι ($\mathbb{P}$-) ανεξάρτητα *και από τον εαυτό τους* (γιατί; Θέστε απλώς $A = B$).

Πόρισμα 6. Τα B και B' θα είναι ($\mathbb{P}$-) ανεξάρτητα αν και μόνο αν $\mathbb{P}(B) = 0$ ή $\mathbb{P}(B) = 1$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι $0 = \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(B \cap B')$. Οπότε, βάσει του A2 τα B και B' θα είναι ($\mathbb{P}$-) ανεξάρτητα αν και μόνο αν $\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(B') = \mathbb{P}(B)\,(1 - \mathbb{P}(B)) = 0$, ενώ η τελευταία ισότητα ισοδυναμεί με το ζητούμενο.□

Σημείωση 7. Δηλαδή τα αμοιβαία αποκλειόμενα ενδεχόμενα είναι ($\mathbb{P}$-) πληροφοριακά μεταξύ τους, εκτός της περίπτωσης που το ένα είναι ($\mathbb{P}$-) πλήρες.

Σημείωση 8. Η παραπάνω έννοια επεκτείνεται σε όποιο πεπερασμένο πλήθος ενδεχομένων. Έτσι, π.χ. τρία ενδεχόμενα $A, B, C \in \Sigma_\Omega$, θα ονομάζονται *από κοινού* ($\mathbb{P}$-) ανεξάρτητα, ανν, ισχύουν οι παρακάτω τέσσερις συνθήκες:

1. $$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,,$$

2.

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(C),$$

3.

$$\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C), \text{ και}$$

4.

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C).$$

Σημειώστε ότι οι 1-3 αφορούν στην (όπως ορίστηκε στον Α2) *ανά ζεύγη* ($\mathbb{P}$-) ανεξαρτησία μεταξύ τους. Οι 1-4 εξασφαλίζουν ότι *κάθε ένα από τα τρία ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητο από όποια δυνατή τομή μεταξύ των υπολοίπων*. Τα παραπάνω επεκτείνονται επαγωγικά σε μεγαλύτερα πλήθη ενδεχομένων. Π.χ. όταν το πλήθος ισούται με τέσσερα, τότε οι συνθήκες αφορούν την ανά ζεύγη ($\mathbb{P}$-) ανεξαρτησία μεταξύ όλων των δυνατών ζευγών, και την ανά τριάδες ($\mathbb{P}$-) από κοινού ανεξαρτησία μεταξύ όλων των δυνατών τριάδων και μία συνθήκη της μορφής $\mathbb{P}(A \cap B \cap C \cap D) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C)\,\mathbb{P}(D)$ ανάλογη με την 4 προηγουμένως (διατυπώστε όλες τις συνθήκες!), κ.ο.κ.