Μερικά Πορίσματα Ιδιοτήτων Κατανομών Πιθανότητας

Τα παρακάτω βρίσκονται σε στάδιο διαρκούς διόρθωσης και δεν υποκαθιστούν τις διαλέξεις. Παρακαλώ αναφέρετε όποια παραδρομή στο stelios@aueb.gr ή στο e-class του μαθήματος.

Στέλιος Αρβανίτης

Πορισμα 1. Για κάθε $A, B \in \Sigma_\Omega$, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B')$.

Αποδειξη. Αφού το $A, B \in \Sigma_\Omega$, τότε και τα $B', A \cap B, A \cap B' \in \Sigma_\Omega$ (το Σ_Ω είναι κλειστό ως προς τις συνολοθεωρητικές πράξεις εφόσον αφορούν "μεγάλο" πλήθος μετρήσιμων υποσυνόλων) και έχουμε ότι $A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$, ενώ $(A \cap B) \cap (A \cap B') = \emptyset$. Επομένως εξαιτίας της αριθμήσιμης προσθετικότητας, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap B')) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B')$.□

Πορισμα 2. Για κάθε $A \in \Sigma_\Omega$, $\mathbb{P}(A') = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Αποδειξη. Αφού το $A \in \Sigma_\Omega$, τότε και το $A' \in \Sigma_\Omega$ και έχουμε ότι $\Omega = A \cup A'$, ενώ $A \cap A' = \emptyset$. Επομένως εξαιτίας της τυποποίησης και της αριθμήσιμης προσθετικότητας αντιστοίχως, $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup A') = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A') \Leftrightarrow \mathbb{P}(A') = 1 - \mathbb{P}(A)$.□

Πορισμα 3. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Αποδειξη. $\emptyset \in \Sigma_\Omega$ και $\emptyset = \Omega'$, οπότε από το Πόρισμα 1 και την τυποποίηση αντίστοιχα, έχουμε $\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\Omega') = 1 - \mathbb{P}(\Omega) = 1 - 1 = 0$.□

Πορισμα 4. [Μονοτονία] Για κάθε $A_1, A_2 \in \Sigma_\Omega$, $A_1 \subseteq A_2 \Longrightarrow \mathbb{P}(A_1) \leq \mathbb{P}(A_2)$.

Αποδειξη. Αφού $A_1, A_2 \in \Sigma_\Omega$, τότε και το $A_1, -A \in \Sigma_\Omega$ (το Σ_Ω είναι κλειστό ως προς τις συνολοθεωρητικές πράξεις εφόσον αφορούν "μεγάλο" πλήθος μετρήσιμων υποσυνόλων). Επίσης, $A_2 = A_1 \cup (A_2 - A_1)$, $A_1 \cap (A_2 - A_1) = \emptyset$. Επομένως εξαιτίας της αριθμήσιμης προσθετικότητας $\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_1 \cup (A_2 - A_1)) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}((A_2 - A_1))$. Εξαιτίας της θετικότητας $\mathbb{P}((A_2 - A_1)) \geq 0$, άρα $\mathbb{P}(A_2) \geq \mathbb{P}(A_1)$.□

Σημειωση 1. Η μονοτονία δεν είναι γνήσια καθώς είναι δυνατόν να έχουμε ότι $A_1 \subset A_2$ αλλά $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2)$, θα δούμε αργότερα παραδείγματα.

Πορισμα 5. Για κάθε $A \in \Sigma_\Omega$, $\mathbb{P}(A) \leq 1$.

Αποδειξη. Αφού $A \in \Sigma_\Omega \Rightarrow A \subseteq \Omega$. Επομένως εξαιτίας της μονοτονίας και της τυποποίησης αντίστοιχα $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(\Omega) = 1$.□

Σημειωση 2. Αν κάποιο $A \in \Sigma_\Omega$ έχει $\mathbb{P}(A) = 1$ τότε ονομάζεται πλήρους ($\mathbb{P}$-) πιθανότητας ενώ αν έχει $\mathbb{P}(A) = 0$ τότε ονομάζεται ($\mathbb{P}$-) αμελητέο. Προφανώς (γιατί;) το συμπλήρωμα ενός πλήρους πιθανότητας μετρήσιμου υποσυνόλου είναι αμελητέο και αντιστρόφως. Προσοχή, το αν το A έχει τέτοιες ιδιότητες εξαρτάται και από το εκάστοτε $\mathbb{P}$.

Πορισμα 6. Για κάθε $A_1, A_2 \in \Sigma_\Omega$, με $A_1 \subseteq A_2$, $\mathbb{P}(A_2 - A_1) = \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1)$.
Αποδειξη. Από την απόδειξη του Πορίσματος 4, έχουμε ότι $\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}((A_2 - A_1))$ από όπου προκύπτει το ζητούμενο.□

Πορισμα 7. Για κάθε $A_1, A_2 \in \Sigma_\Omega$, $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) \leq \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$.
Αποδειξη. Η μετρησιμότητα των παρακάτω προκύπτει όπως και προηγουμένως. Εχουμε ότι $(A_1 \cup A_2) - A_1 = A_2 - (A_1 \cap A_2)$, επομένως $\mathbb{P}((A_1 \cup A_2) - A_1) = \mathbb{P}(A_2 - (A_1 \cap A_2))$. Επειδή $(A_1 \cup A_2) \supseteq A_1$ και $A_2 \supseteq (A_1 \cap A_2)$, εφαρμόζοντας και στις δύο πλευρές της προηγούμενης ισότητας πιθανοτήτων το Πόρισμα 6 παίρνουμε $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) - \mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$ από όπου προκύπτει το

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2). \tag{1}$$

Εξαιτίας της θετικότητας $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \geq 0$, οπότε $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) - \mathbb{P}(A_1) - \mathbb{P}(A_2) \geq 0$, από όπου προκύπτει το ζητούμενο.□

Σημειωση 3. Η σχέση 1 συμφωνεί με την ιδιότητα της προσθετικότητας όταν τα δύο μετρήσιμα σύνολα είναι ξένα μεταξύ τους. Γενικεύεται ακόμη και για άπειρο πλήθος (αλλά όχι "πολύ μεγάλο") από τέτοια σύνολα. Ετσι προκύπτει η ιδιότητα της αριθμήσιμης ύπο-προσθετικότητας που λέει ότι, για κάθε $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \Sigma_\Omega$,

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots) \leq \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \dots + \mathbb{P}(A_n) + \dots .$$