Σύνοψη 2ης Διάλεξης και Ασκήσεις

Τα παρακάτω βρίσκονται σε στάδιο διαρκούς διόρθωσης και δεν υποκαθιστούν τις διαλέξεις. Παρακαλώ αναφέρετε όποια παραδρομή στο stelios@aueb.gr ή στο e-class του μαθήματος.

Στέλιος Αρβανίτης

Αφού θυμηθήκαμε βασικές έννοιες από την συνολοθεωρία εξετάσαμε την έννοια της κατανομής πιθανότητας. Η κατασκευή αυτή ενέπλεξε την έννοια του καταλόγου από σύνολα στα οποία μπορούν να αποδωθούν με συνεπή τρόπο πιθανότητες οπότε αρχικά αναγκαστήκαμε να ασχοληθούμε με την έννοια του μετρήσιμου χώρου.

Ετσι, δεδομένου συνόλου αναφοράς $\Omega \neq \emptyset$ θεωρήσαμε συλλογή (έστω Σ_Ω) που αποτελείται από τα μετρήσιμα υποσύνολα του Ω, δηλαδή τα υποσύνολα του στα οποία μπορεί να αποδοθεί κάποια έννοια μεγέθους. Η συλλογή αυτή αναγκαστικά περιέχει τα Ω και $\emptyset$, ενώ είναι κλειστή ως προς ενώσεις, τομές, συμπληρώματα, διαφορές κ.ο.κ., εφόσον αυτές δεν έχουν "μεγάλο πλήθος". Οταν το Ω είναι απειροσύνολο είναι δυνατόν να υπάρχουν κομμάτια του στα οποία είναι "μη δυνατή" η απόδοση μεγέθους. Κάτι τέτοιο συμβαίνει για παράδειγμα στην περίπτωση που $\Omega = \mathbb{R}$. Παρόλα αυτά, στο συγκεκριμένο παράδειγμα η εν λόγω συλλογή θα αποτελείται από τα "οικεία" υποσύνολα των πραγματικών (ανοικτά και κλειστά διαστήματα, μονοσύνολα κ.ο.κ.).

Ορισμος. Η δυάδα (Ω, Σ_Ω) ονομάζεται μετρήσιμος χώρος.$\square$

Η παραπάνω έννοια κωδικοποιεί την πληροφορία που περιλαμβάνει το σύνολο αναφοράς, μαζί με τα "κομμάτια" του στα οποία μπορούν να αποδοθούν πιθανότητες. *Δεδομένου* του παραπάνω, μια κατανομή πιθανότητας θα είναι ένας μηχανισμός ο οποίος αποδίδει πιθανότητες στα παραπάνω κομμάτια και ικανοποιεί "εύλογους" περιορισμούς. Πιο συγκεκριμένα:

Ορισμος. Κατανομή ή μέτρο πιθανότητας στο Ω είναι όποια συνάρτηση $\mathbb{P} : \Omega : \Sigma_\Omega \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $\mathbb{P}(A) \geq 0, \ \forall A \in \Sigma_\Omega$ (θετικά ορισμένη),
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (τυποποίηση), και,
3. αν τα $A_1, A_2, \ldots \in \Sigma_\Omega$ και είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους τότε $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \ldots$ (αριθμήσιμη προσθετικότητα).$\square$

Η τελευταία ιδιότητα είναι δυνατόν να εμπλέκει κατάλληλα άπειρο αριθμό προσθετέων (για να το κατανοήσουμε χρειαζόμαστε και την έννοια της σειράς) και ονομάζεται *αριθμήσιμη προσθετικότητα* (countable additivity). Αυτό διαμορφώνει μια έννοια συνέχειας για την κατανομή η οποία είναι όμως μακριά από τα ενδιαφέροντα μας στο παρόν μάθημα.

Ορισμος. Η τριάδα $(\Omega, \Sigma_\Omega, \mathbb{P})$ ονομάζεται χώρος πιθανότητας.$\square$

Η παραπάνω έννοια κωδικοποιεί την πληροφορία που περιλαμβάνει το σύνολο αναφοράς, μαζί με τα ”κομμάτια” του στα οποία μπορούν να αποδοθούν πιθανότητες, καθώς και της πιθανότητας που αποδίδεται σε κάθε ένα από αυτά από την συγκεκριμένη κατανομή.

Χρησιμοποιώντας τα όσα είδαμε στην αρχή για τα σύνολα και τις τρεις προϋποθέσεις του ορισμού, ξεκινήσαμε την εξαγωγή πορισμάτων τα οποία διατυπώνουν περαιτέρω ιδιότητες των κατανομών. Ετσι, αφότου εξάγαμε την έννοια της συμπληρωματικής πιθανότητας, αποδείξαμε ότι $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, ότι για οποιαδήποτε μετρήσιμα A, B, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B')$, και ότι η $\mathbb{P}$ είναι και μονότονη με την κατάλληλη έννοια. Περισσότερες ιδιότητες, ερμηνείες αυτών, και παραδείγματα θα δούμε στην επόμενη διάλεξη.

Ασκησεις:

1. Να δείξετε ότι αν $A, B \in \Sigma_\Omega$ με $A \subseteq B$ και $\mathbb{P}(B) = 0$, τότε και $\mathbb{P}(A) = 0$.
2. Να δείξετε ότι αν $A, B \in \Sigma_\Omega$ με $A \subseteq B$ και $\mathbb{P}(A) = 1$, τότε και $\mathbb{P}(B) = 1$.
3. Να δείξετε ότι αν $A, B \in \Sigma_\Omega$ και $\mathbb{P}(A \cap B) = 1$, τότε και $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1$.
4. Να δείξετε ότι αν $A, B \in \Sigma_\Omega$ και $\mathbb{P}(A \cup B) = 0$, τότε και $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 0$.