# ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ 7

## ΡΟΠΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

ΟΡΣ Έστω κατανομή $P$ στο $\mathbb{R}$, και $k \in \mathbb{N}$. Τότε η ροπή $k$ τάξης της $P$ είναι η

$$E x^k = \begin{cases} \sum_{i \in supp} i^k \cdot P(\{i\}), & \text{όταν η } P \text{ είναι διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x)\,dx, & \text{όταν η } P \text{ έχει συνάρτηση πυκνότητας την } f \end{cases}$$

Η απόλυτη ροπή $k$ τάξης ορίζεται ως

$$E|x|^k = \begin{cases} \sum_{i \in supp} |i|^k \cdot P(\{i\}), & \text{όταν η } P \text{ είναι διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x)\,dx, & \text{όταν η } P \text{ έχει συνάρτηση πυκνότητας την } f \end{cases}$$

## ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1. $E x^0 = E|x|^0 = 1$
2. $\exists\, E x^k$ ανν $\exists\, E|x|^k$
3. Η $E x$ ονομάζεται μέσος και η $Var(x) = E x^2 - (E x)^2$ ονομάζεται διακύμανση
4. Αν $\exists\, E x^k$ τότε $\exists\, E x^{k^*}$, $\forall\, k^* \leq k$
   Ή αν $\nexists\, E x^k$ τότε $\nexists\, E x^{k^*}$, $\forall\, k^* \geq k$
5. $\nexists\, E|x|^k$ ανν $E|x|^k = +\infty$
6. Ανισότητα Markov : $P(|x| > \varepsilon) \leq \frac{E|x|^k}{\varepsilon^k}$, για $\varepsilon > 0$

## ΕΡΩΤΗΜΑ

Έστω η $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ορίζεται πάντα το $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dF$ ?

## ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Ναι, αλλά θα μας απασχολήσουν μόνο 2 περιπτώσεις

$$Eg(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dF = \begin{cases} \sum_{i \in supp} g(i)P(\{i\}), & \text{αν η κατανομή είναι διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\,dx, & \text{αν η κατανομή έχει συνάρτηση πυκνότητας} \end{cases}$$

## ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Είναι δυνατόν το $Eg(x)$:
   α. να μην υπάρχει
   β. να απειρίζεται
   γ. να είναι πραγματικός

   Θα λέμε ότι η $Eg(x)$ υπάρχει, μόνο στην περίπτωση (γ)
2. Το $E\,g(x)$ εξαρτάται και από τη $g(x)$ αλλά και από την $P$.

## Άσκηση 1

Έστω τυχαία μεταβλητή $X \sim \exp(1)$ και συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $g(x) = a^x$, όπου $0 < a < e$. Βρείτε την αναμενόμενη τιμή της $g$ ως προς την κατανομή την $X$. Δίνεται η pdf της εκθετικής με παράμετρο $\lambda$: $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ με $\lambda > 0$

## Λύση

**Σημείωση 1**: $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

**Σημείωση 2**: $0 < a < e \Rightarrow 0 < \underbrace{\frac{a}{e}}_{=b} < 1$

και $\lim_{x \to +\infty} b^x = 0$

**Σημείωση 3**: ολοκλήρωση κατά μέλη ή κατά παράγοντες

γενικός ορισμός: $$\int_a^\beta f(x) g'(x) dx = \left[ f(x) g(x) \right]_a^\beta - \int_a^\beta f'(x) g(x) dx$$

όπου $f'$, $g'$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$.

Η Χ ακολουθεί την εκθετική κατανομή που σημαίνει

$$f(x;\lambda)=\begin{cases}\lambda\cdot e^{-\lambda x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases} \overset{\lambda=1}{\Rightarrow} f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

Από τον γενικό ορισμό έχουμε:

$$E\,g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} a^x\cdot e^{-x}\,dx=\int_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int_{0}^{+\infty} a^x\cdot e^{-x}\,dx=$$

$$=-\int_{0}^{+\infty} a^x(-e^{-x})\,dx=-\int_{0}^{+\infty} a^x\cdot(e^{-x})'\,dx \overset{\text{σημείωση 3}}{=\!=}$$

$$=\left[-a^x\cdot e^{-x}\right]_0^{+\infty}-\left(-\int_{0}^{+\infty}(a^x)'\cdot e^{-x}\,dx\right)\overset{\text{σημείωση 1}}{=\!=}$$

$$=\left[-\frac{a^x}{e^x}\right]_0^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty} a^x\ln a\cdot e^{-x}\,dx \overset{\text{σημείωση 2}}{=\!=}$$

$$=-\lim_{x\to\infty}\frac{a}{e}+1+\ln a\int_{0}^{+\infty} a^x\cdot e^{-x}\,dx \overset{E g(x)=\int_0^{+\infty} a^x\cdot e^{-x}dx}{=\!=} 1+\ln a\,E\,g(x)$$

$$\Rightarrow E\,g(x)=1+\ln a\,E\,g(x)\Rightarrow E\,g(x)=\frac{1}{1-\ln a}$$

## Άσκηση 2

Έστω X τυχαία μεταβλητή που αναπαριστά το αποτέλεσμα της ρίψης ενός αμερόληπτου ζαριού. Να βρείτε τη ροπή δεύτερης τάξης και την διακύμανση της X.

Λύση

$$P(X=x)=\frac{1}{6}$$

Από τον ορισμό έχουμε:

$$E(x^2)=\sum_{x=1}^{6} x^2 \cdot P(X=x) = \frac{1}{6}\left(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2\right)$$

$$=\frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36)$$

$$=\frac{91}{6}$$

$$Var(x) \equiv E[x-E(x)]^2 \overset{*}{=} E\left[x^2-2xE(x)+E^2(x)\right]$$

$$\Rightarrow Var(X)=E x^2-(E(x))^2$$

όπου

$$E(x)=\sum_{i=1}^{6} x \cdot P(X=x) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)$$

$$=\frac{21}{6}$$

Συνεπώς, $Var(X)=E x^2-(E x)^2$

$$=\frac{91}{6}-\left(\frac{21}{6}\right)^2=\frac{91}{6}-\frac{441}{36}=\frac{546-441}{36}$$

$$\simeq 2.92$$

$$\Rightarrow Var(X)\simeq 2.92$$

$$* \; E(x-Ex)^2 = E\left(x^2-2xEx+(Ex)^2\right) = Ex^2-2ExEx+(Ex)^2$$

$$=Ex^2-(Ex)^2$$

## Άσκηση 3

Έστω $X \sim exp(\lambda)$, $\lambda > 0$. Να βρείτε την απόλυτη ροπή $k$ τάξης, και ακολούθως, να δείξετε ότι $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Δίνονται: • pdf της εκθετικής

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

• $\int_0^{+\infty} t^a \cdot e^{-t} dt = \Gamma(a+1) = a!$ (συνάρτηση Γάμμα)

## Λύση

Εφόσον το στήριγμα της κατανομής είναι το $[0,+\infty)$ τότε $E(|X|^k) = E(X^k)$. Συνεπώς, η ροπή $k$ τάξης:

$$E(X^k) = \int_{supp} x^k \cdot f(x) dx = \int_0^{+\infty} x^k \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx$$

πολ/ζω και διαιρώ με $\lambda^k$ για να πάω στη Γ

$$= \lambda^{-k} \int_0^{+\infty} (\lambda x)^k \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx$$

Αλλαγή μεταβλητής: $t = \lambda x \Rightarrow dt = \lambda \cdot dx$, $\lambda > 0$, $t_1 = 0$, $t_2 = +\infty$

$$= \lambda^{-k} \int_0^{+\infty} \frac{\cancel{\lambda} t^k \cdot e^{-t} \cdot dt}{\cancel{\lambda}} = \lambda^{-k} \int_0^{+\infty} t^k \cdot e^{-t} \cdot dt = \lambda^{-k} \Gamma(k+1)$$

$$= \lambda^{-k} \cdot k! = \frac{k!}{\lambda^k}$$

Ροπή $1^{ης}$ τάξης: $E x = \frac{1}{\lambda}$

Ροπή $2^{ης}$ τάξης: $E x^2 = \frac{1 \cdot 2}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$

$$Var(X) = Ex^2 - (Ex)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

## Άσκηση 4

Έστω $X \sim Gamma(a,b)$, όπου $a,b>0$. Να βρείτε την ροπή $k$ τάξης της κατανομής και να δείξετε ότι $Var(X) = \frac{a}{b^2}$. Δίνονται:

- pdf της Γάμμα κατανομής: $f(x;a,b) = \begin{cases} \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \cdot e^{-bx}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$
- $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt = (a-1)!$ συνάρτηση Γάμμα

### Λύση

Η ροπή $k$ τάξης είναι:

$$E(X^k) = \int_{supp} x^k \cdot f(x;a,b)\, dx = \int_0^{+\infty} x^k \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx} dx$$

$$= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} x^{k+a-1} \cdot e^{-bx} dx$$

πολ/ζω κ' διαιρώ με $b^{k+a-1}$

$$= \frac{b^a}{b^{k+a-1}\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} x^{k+a-1} \cdot b^{k+a+1} \cdot e^{-bx} dx$$

$$= \frac{b^a}{b^{k+a-1}\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} (bx)^{k+a-1} \cdot e^{-bx} dx$$

$$= \frac{b^{1-k}}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} (xb)^{a-1+k} e^{-bx} dx$$

Αλλαγή Μεταβλητής $\frac{b^{1-k}}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1+k} e^{-t} \cdot dt}{b}$

$t = bx \Rightarrow dt = b dx$

$t_1 = 0,\ t_2 = +\infty$

$$= \frac{b^{-k}}{\Gamma(a)} \underbrace{\int_0^{+\infty} t^{a-1+k} \cdot e^{-t} dt}_{\Gamma(a+k)} = \frac{b^{-k}}{\Gamma(a)} \Gamma(a+k)$$

· Ροπή $1^{ης}$ τάξης: $Ex = \frac{b^{-1}}{\Gamma(a)} \Gamma(a+1) = \frac{b^{-1}}{(a-1)!} \cdot a!$

$$= b^{-1} \cdot \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (a-1)} \cdot a}{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (a-1)}} = \frac{a}{b}$$

· Ροπή $2^{ης}$ τάξης: $Ex^2 = \frac{b^{-2}}{\Gamma(a)} \Gamma(a+2) = \frac{b^{-2}}{(a-1)!} (a+1)!$

$$= b^{-2} \cdot \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (a-1)} a \cdot (a+1)}{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (a-1)}}$$

$$= \frac{a(a+1)}{b^2}$$

· $Var(x) = Ex^2 - (Ex)^2 = \frac{a(a+1)}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} = \frac{a}{b^2}$

5

## Άσκηση 5

Έστω $X \sim Weibull(a,b)$, όπου $a,b>0$. Να βρείτε τη ροπή $k$ τάξης και να δείξετε ότι

$$Var(X) = \frac{\left[\Gamma(1+2a^{-1}) - \Gamma(1+a^{-1})^2\right]}{b^2}$$

Δίνονται:

- pdf της κατανομής: $f(x;a,b) = \begin{cases} a b^a x^{a-1} e^{-(bx)^a}, & x>0 \\ 0, & x\leq 0 \end{cases}$
- $\int_0^{+\infty} t^{a-1} \cdot e^{-t} dt = \Gamma(a) \equiv (a-1)!$ συνάρτηση Γάμμα

Λύση:

$$E(X^k) = \int_{supp} x^k f(x) dx = \int_0^{+\infty} x^k a b^a x^{a-1} e^{-(bx)^a} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} a x^{a-1+k} \cdot b^a \cdot e^{-(bx)^a} dx$$

πολ/ζω και διαιρώ με $b^k$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{b^k} (bx)^k a b^a x^{a-1} e^{-(bx)^a} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \left\{\left[(bx)^a\right]^{\frac{1}{a}}\right\}^k \frac{1}{b^k} a b^a x^{a-1} e^{-(bx)^a} dx$$

Αλλαγή Μεταβλητής

$=$

$t=(bx)^a \Rightarrow dt = a b^a x^{a-1}$

$t_1=0,\ t_2=+\infty$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{k}{a}}}{b^k} e^{-t} dt = \frac{\Gamma\left(\frac{k}{a}+1\right)}{b^k}$$

- Ροπή $1^{ης}$ τάξης: $Ex = \dfrac{\Gamma(a^{-1}+1)}{b}$

- Ροπή $2^{ης}$ τάξης: $Ex^2 = \dfrac{\Gamma(2a^{-1}+1)}{b^2}$

- $Var(x) = Ex^2 - (Ex)^2 = \dfrac{\Gamma(2a^{-1}+1)}{b^2} - \dfrac{\Gamma(a^{-1}+1)^2}{b^2}$

$$= \frac{\Gamma(2a^{-1}+1) - \Gamma(a^{-1}+1)^2}{b^2}$$