Συνάρτηση Πυκνότητας ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ 6 ΚΑΙΝ.

Ορισμός: Έστω κατανομή πιθανότητας στον $\mathbb{R}$ με αθροιστική συνάρτηση $F: \mathbb{R} \to [0,1]$

Εάν υπάρχει f, τέτοια ώστε:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz$$

τότε η f ονομάζεται συνάρτηση πυκνότητας της κατανομής (pdf)

Θεώρημα ύπαρξης

προκειμένου να υπάρχει η f είναι απαραίτητο

1. η F να είναι <u>παντού</u> συνεχής
2. η F να είναι <u>σχεδόν παντού</u> παραγωγίσιμη

* σχεδόν παντού: επιτρέπεται να υπάρχουν x στα οποία η F δεν είναι παραγωγίσιμη, αρκεί να είναι απομονωμένα μεταξύ τους (δλδ να συγκροτούν ένα διακριτό σύνολο)

Συνεπώς οι διακριτές κατανομές <u>δεν</u> έχουν συνάρτηση πυκνότητας. (πχ εκφυλισμένη, Bernoulli, Poisson, Συνεχής P με ασυνεχή F, μεικτή)

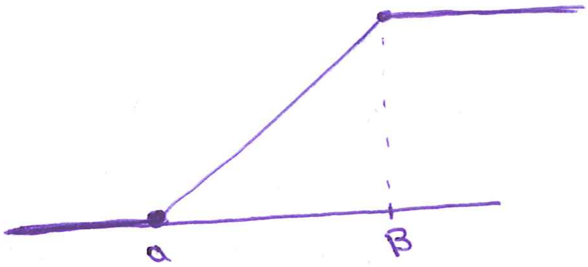
Πώς βρίσκω την f?

- όπου η F είναι παραγωγίσιμη, έχουμε $f = \frac{dF}{dx}$
- στα σημεία όπου η F δεν παραγωγίζεται η f παίρνει αυθαίρετες τιμές. Για λόγους συνεννόησης επιλέγω τις τιμές αυτές για τις οποίες η f είναι συνεχής στο στήριγμα.

παράδειγμα: unif$[\alpha, \beta]$

η P είναι συνεχής, αφού $\operatorname{supp} P = [\alpha, \beta]$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < \alpha \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, & \alpha \leq x < \beta \\ 1, & x \geq \beta \end{cases}$$



Θεώρημα ύπαρξης

1. παντού συνεχής η F (το δείξαμε)
2. σχεδόν παντού παραγωγίσιμη (εκτός α, β) $\Rightarrow$ για το σπίτι

Τα 1,2 εγγυώνται την ύπαρξη της f

·παραγωγίζω όπου η F είναι παραγωγίσιμη

$x < \alpha \quad f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = 0$ F σταθερή

$\alpha < x < \beta \quad f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{1}{\beta - \alpha}$ F γραμμική

$x > \beta \quad f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = 0$ F σταθερή

F παραγωγίσιμη

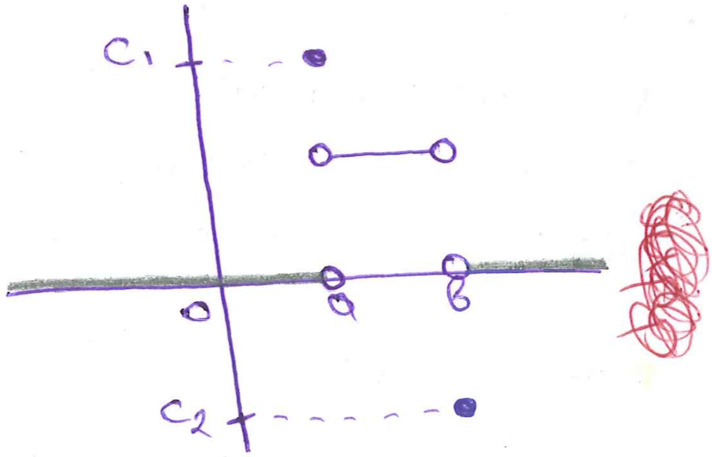
παρατηρώ ότι εκτός supp η $f(x) = 0$, αφού εκτός supp η F σταθερή και η παράγωγός της θα είναι 0.

Στα α, β δεν είναι παραγωγίσιμη (έχει γωνίες και δεν μπορώ να φέρω εφαπτομένη με μοναδικό τρόπο)

Στα α,β λοιπόν δίνω αυθαίρετες τιμές

Έστω $f(\alpha)=c_1$, $f(\beta)=c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

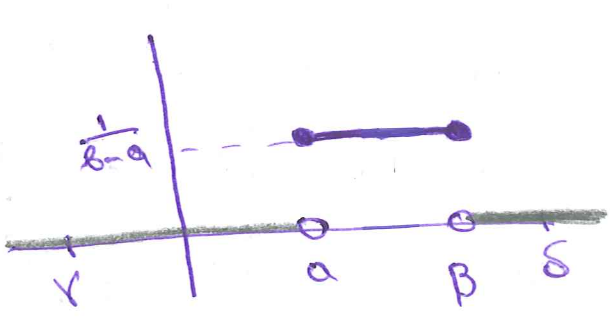
$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<\alpha \\ c_1, & x=\alpha \\ \frac{1}{\beta-\alpha}, & \alpha<x<\beta \\ c_2, & x=\beta \\ 0, & x>\beta \end{cases}$$



Παρατηρώ ότι υπάρχουν άπειρες $f(x)$, ανάλογα με το ποια c_1, c_2 θα διαλέξω. Άρα σε αυτή την περίπτωση η f δεν είναι μοναδική. Εφόσον τα α,β είναι απομονωμένα όμως, οι πιθανότητες δεν επηρεάζονται. Συμβατικά όμως διαλέγω τιμές τέτοιες ώστε η f να είναι συνεχής στο στήριγμα

εδώ $\text{supp}=[\alpha,\beta]$. Θέλω $f(\alpha)=f(\beta)=\frac{1}{\beta-\alpha}$

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<\alpha \\ \frac{1}{\beta-\alpha}, & \alpha\le x\le\beta \\ 0, & x>\beta \end{cases}$$



ΘΕΩΡΗΜΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΥ

Αν υπάρχει η f τότε

α. $f \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ και $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

β. Αν το x είναι σημείο παραγωγισιμότητας της F, τότε $f(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x}$, ενώ εκεί που η F δεν είναι παραγωγίσιμη η f παίρνει αυθαίρετες τιμές.

Άρα αν έχω την f και θέλω να εξετάσω αν είναι pdf ελέγχω αν

1. $f \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ και
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

1. Η pdf δεν ορίζεται για κάθε κατανομή σε αντίθεση με την F που ορίζεται πάντα.
2. Αν ορίζεται, μπορεί να μην είναι μοναδική (μπορεί η F να έχει κάποια σημεία μη παραγωγισιμότητας), σε αντίθεση με την F που είναι πάντα μοναδική.
3. Αν ορίζεται, μπορεί να χρησιμοποιηθεί προκειμένου να υπολογίζω πιθανότητες
4. Επιλέγω την f που είναι συνεχής στο σχήμα.

Άσκηση 1

1. Νδο η παρακάτω συνάρτηση είναι pdf
2. Να βρείτε την πιθανότητα $P(X \leq 4)$
3. Την αθροιστική συνάρτηση $F(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{x^2}, & x \geq 1 \end{cases}$$

1. Για να είναι pdf θα πρέπει να πληροί τις ιδιότητες που ορίζει το Θεώρημα Χαρακτηρισμού

α. $f(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει

β. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{+\infty} f(x)dx = 0 + \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$

$$= \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty} = \lim_{x \to +\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{1} = 1$$

2. $P([a,b]) = \int_a^b f(x)dx$

$P(X \leq 4) = P((-\infty, 4]) = \int_{-\infty}^{4} f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{4} f(x)dx$

$$= 0 + \int_1^4 \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^4 = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$$

3. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz$ (Από τον ορισμό)

- $x < 1$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{x} 0\,dz = 0$
- $x \geq 1$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{1} f(z)\,dz + \int_{1}^{x} f(z)\,dz$

$$= 0 + \left[-\frac{1}{z}\right]_{1}^{x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{1} = 1 - \frac{1}{x}$$

Άρα $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$

Άσκηση 2

Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} c x^2, & 0 < x < 3 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

α. Βρείτε το c ώστε η f να είναι pdf

β. Βρείτε την F

Λύση

α. Ιδιότητες Θεωρήματος Χαρακτηρισμού

- $f(x) \geq 0 \Rightarrow c x^2 \geq 0 \Rightarrow c \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{3} f(x)\,dx + \int_{3}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

$$\Leftrightarrow 0 + \int_{0}^{3} c x^2\,dx + 0 = 1 \Leftrightarrow \left[c\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{3} = 1$$

$$\Rightarrow c\left[\frac{27}{3} - 0\right] = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{9}$$

β. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz$

• $x \le 0 \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz$

• $0 < x < 3 \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz = \int_{-\infty}^{0} f(z)dz + \int_{0}^{x} f(z)dz$

$$= 0 + \int_{0}^{x} \frac{z^2}{9} dz = \left[\frac{z^3}{27}\right]_0^x = \frac{x^3}{27}$$

• $x \ge 3 \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz = \int_{-\infty}^{0} f(z)dz + \int_{0}^{3} f(z)dz$

$$+ \int_{3}^{x} f(z)dz$$

$$= 0 + \left[\frac{z^3}{27}\right]_0^3 + 0 = \frac{27}{27} - 0 = 1$$

Το ξέραμε και από το α' ερώτημα

Η αθροιστική είναι

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^3}{27}, & 0 \le x < 3 \\ 1, & x \ge 3 \end{cases}$$

* Γενικά ισχύει ότι $I = \int_{a}^{b} c\,dx = c(b-a) \quad \forall c \in \mathbb{R}$

οπότε αν $c = 0 \Rightarrow I = 0$

Ασκηση 3

Εστω τυχαία μεταβλητη $X \sim exp(1)$ με $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g(x) = a^x$, όπου $0 < a < e = 2.71828$.

Βρειτε την αναμενόμενη τιμή της g ως προς την κατανομή της X. Δίνεται η pdf της εκθετικής κατανομής

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases},$$

$$E(a^x) = \int_{-\infty}^{+\infty} a^x \cdot f(x)\, dx \overset{\lambda=1}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} a^x \cdot e^{-x} dx = \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{+\infty} a^x \cdot e^{-x} dx$$

$$= -\int_{0}^{+\infty} a^x (-e^{-x}) = -\int_{0}^{+\infty} a^x (e^{-x})' \cdot dx = \left[-a^x \cdot e^{-x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} (a^x)' e^{-x} dx$$

$$= \left[-\frac{a^x}{e^x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{+\infty} a^x \cdot e^{-x} dx = -\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a}{e}\right)^x + \left(\frac{a}{e}\right)^0 + \int_0^{\infty} a^x \ln a (e^{-x}) dx$$

$$= 1 + \ln a \underbrace{\int_0^{+\infty} a^x \cdot e^{-x} dx}_{E(a^x)} = 1 + \ln a \cdot E(a^x)$$

$$\Rightarrow E(a^x) = \frac{1}{1 - \ln a}$$

*υπενθύμιση 1: $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad a > 0, a \neq 1$

**υπενθύμιση 2: $0 < a < e \Rightarrow 0 < \frac{a}{e} < 1$

και $\lim_{x \to +\infty} b^x = 0, \quad 0 < b < 1$

Υπολογισμός Πιθανοτήτων
με χρήση της αθροιστικής συνάρτησης πιθανότητας (F)

ο ορισμός της F είναι

$F(x) := (-\infty, x]$

η $F(x)$ έχει την ιδιότητα $\lim_{y \to x^-} F(y) = P(-\infty, x)$

Από τα παραπάνω προκύπτει

- $P(\{x\}) = F(x) - \lim_{y \to x^-} F(y)$
- $P(a,b] = F(b) - F(a)$
- $P(a,b) = \lim_{x \to \beta} F(x) - F(a)$
- $P[a,b] = F(b) - \lim_{x \to a^-} F(x)$
- $P[a,b) = \lim_{x \to b^-} F(x) - \lim_{x \to a^-} F(x)$

όταν τα a, b είναι σημεία συνέχειας τότε

$P(a,b] = P(a,b) = P[a,b] = P[a,b) = F(b) - F(a)$

<u>Πορίσματα</u>

1. Η F συνεχής στο X αν $P(\{x\}) = 0$
2. Αν P διακριτή τότε F ασυνεχής στο X ανν $x \in \operatorname{supp} P$