Φροντιστήριο 4ο

Έστω μετρήσιμος χώρος $(\mathbb{R}, \Sigma_{\mathbb{R}})$. Βρείτε την αθροιστική συνάρτηση για την διωνυμική κατανομή.

Διωνυμική Κατανομή

$supp(P) = \{0, 1, \ldots, n\}$ με $P(\{x\}) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

όπου $p \in (0,1)$, $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$ $\forall\, x \in supp(P)$

Η αθροιστική κατανομή $F: \mathbb{R} \to [0,1]$ ορίζεται ως

$$F(x) = P((-\infty, x])$$

Επομένως, για να βρούμε την αθροιστική συνάρτηση πρέπει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να υπολογίσουμε την $P((-\infty, x])$. Σε αυτό θα μας βοηθήσει το στήριγμα. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $x < 0$

  $P((-\infty, x]) = P((-\infty, x] \cap supp(P)) = P(\emptyset) = 0$

- $0 \leq x < 1$

  $P((-\infty, x]) = P((-\infty, x] \cap supp(P)) = P(\{0\})$

- $1 \leq x < 2$

  $P((-\infty, x]) = P((-\infty, x] \cap supp(P)) = P(\{0, 1\}) = P(\{0\}) + P(\{1\})$

  ⋮

- $n \leq x$

  $P((-\infty, x]) = P((-\infty, x] \cap supp(P)) = P(\{0, 1, \ldots, n\}) = 1$

Συνοψίζοντας τα παραπάνω έχουμε:

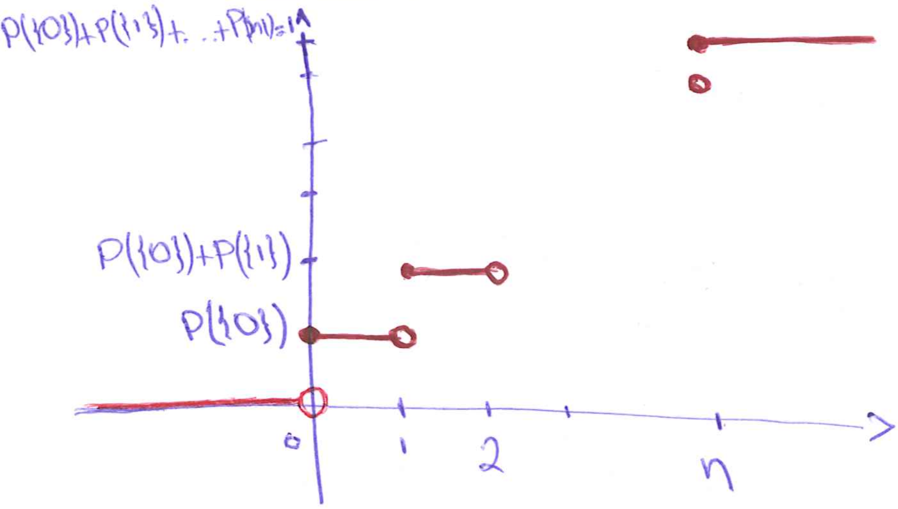
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} P(\{i\}), & 0\le x<n \\ 1, & x \ge n\end{cases} \qquad \text{όπου } x\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad F(x;n,p) = P_r(X\le x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x<0\\ \sum_{i=0}^{\lfloor x\rfloor}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}, & 0\le x<n \\ 1, & x\ge n\end{cases}$$

όπου $\lfloor x \rfloor = \max\{m\in\mathbb{N}: m\le x\}$, δηλαδή ο μεγαλύτερος φυσικός $\le x$. π.χ. $\lfloor 3{,}31 \rfloor = 3$, $\lfloor 4 \rfloor = 4$, $\lfloor 5.1\rfloor = 5$

Το βάζω διότι το $x\in\mathbb{R}$, όμως στο άθροισμα θέλω το $i=0,1,2,\dots,n$

Γράφημα Διωνυμικής



Παρατηρήσεις

1. Στα διαστήματα εκτός supp, η F είναι σταθερή $(-\infty,0), (0,1), (1,2), \dots, (n,+\infty)$. Στα $x \in$ supp, έχω ασυνέχεια και $P(\{x\})>0$.

2. Αριθμός ασυνεχειών $=(n+1)$
3. Συνέχεια από δεξιά, π.χ. $\lim_{x\to 0^+} F(x)=F(0)$ κ.ο.κ.
4. $\lim_{x\to -\infty} F(x)=0, \quad \lim_{x\to +\infty} F(x)=1$

5. Μη φθίνουσα

Επιβεβαίωση Ιδιοτήτων της F

1. $\lim_{x\to -\infty} F(x)=0$, αφού $F(x)=0, \ \forall x<0$

   $\lim_{x\to +\infty} F(x)=1$, αφού $F(x)=1, \ \forall x \geq n$

2. Έστω $x_1<x_2$ τότε η F είναι μη φθίνουσα

   - Αν $x_1, x_2<0 \Rightarrow F(x_1)=F(x_2)=0$
   - Αν $x_1<0\leq x_2 \Rightarrow \underset{0}{\underset{\parallel}{F(x_1)}}<F(x_2)$

   ⋮

   - Αν $x_2>x_1\geq n \Rightarrow F(x_1)=F(x_2)=1$

3. Δεξιά συνεχής

   - $\lim_{x\to 0^+} F(x)=F(0)=P(\{0\})$ $\left(! \ \lim_{x\to 0^-} \overset{\overset{0}{\parallel}}{F(x)} \neq \lim_{x\to 0^+} \overset{\overset{P(\{0\})}{\parallel}}{F(x)}\right)$

   - $\lim_{x\to 1^+} F(x)=F(1)=P(\{0\})+P(\{1\})$

4. Πεπερασμένο Πλήθος Ασυνεχειών: $(n+1)$

Διωνυμική Κατανομή

Διακριτή συνάρτηση κατανομής τυχαίας μεταβλητής. Περιγράφει ένα τυχαίο πείραμα με δύο πιθανά αποτελέσματα (επιτυχία - αποτυχία) και πιθανότητα επιτυχίας p, που επαναλαμβάνεται n φορές.

X: τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τον αριθμό των επιτυχιών

Η πιθανότητα να έχουμε x επιτυχίες σε n ανεξάρτητα πειράματα με πιθανότητα επιτυχίας p κάθε φορά είναι:

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad \text{όπου } \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

$p \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$

Μέση τιμή: $n \cdot p$

Διακύμανση: $np(1-p)$

για $n=1$ γίνεται Bernoulli

$P(X=1) = p$

$P(X=0) = 1-p$

π.χ. Ποια η πιθανότητα σε μια παρέα 3 ατόμων οι δύο να έχουν κινητό, όταν το 40% των ατόμων έχει?

$p=0.4$, $x=2$, $n=3$

$$P(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$P(2) = \frac{3!}{2!(3-2)!} 0.4^2 \cdot 0.6^1 = \frac{6}{2} \cdot 0.4^2 \cdot 0.6 = 0.288$$

$= 28.8\%$

Διωνυμικό Ανάπτυγμα: $(\alpha+\beta)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \alpha^i \cdot \beta^{n-i}$

Poisson από Μεταφορά

χώρος πιθανότητας $(\mathbb{R}, \Sigma_{\mathbb{R}}, P)$, με κατανομή πιθανότητας P την Poisson, δηλαδή ισχύει

$$supp(P) = \{0, 1, 2, \dots\} \quad με \quad P(\{x\}) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

$\forall x \in supp(P)$

$\lambda \in (0, +\infty)$

Έστω τυχαία μεταβλητή $X_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ όπου $X_1(z) = -z$

Να βρεθούν:

α. το στήριγμα

β. η συνάρτηση πιθανότητας

γ. η αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας που προκύπτει, έστω P_{X_1} από τη μεταφορά της P μέσω της συνάρτησης X_1.

α. Για $\forall x \in supp(P)$ ισχύει $X_1(x) = -x$

άρα $X_1^{-1}(x) = x$

υπολογίζω αντίστροφες εικόνες, $\forall x \in supp(P)$

$X_1(0) = 0$, $X_1^{-1}(0) = 0$

$X_1(1) = -1$, $X_1^{-1}(-1) = 1$

$X_1(2) = -2$, $X_1^{-1}(-2) = 2$

$X_1(3) = -3$, $X_1^{-1}(-3) = 3$

παρατηρώ ότι οι αντίστροφες εικόνες των $\{0, -1, -2, \dots\}$ σχηματίζουν το $suppP = \{0, \dots\}$

Αφού η X_1 είναι τυχαία μεταβλητή θα ισχύει

$P_{X_1}(A) = P(X_1^{-1}(A)) \quad \forall A \in \Sigma_{\mathbb{R}}^{\substack{καινούριος \\ χώρος}}$. Παρατηρούμε

όμως ότι $\forall x \in supp(P)$, $P_{X_1}(\{-x\}) = P(X_1^{-1}(\{-x\})) = P(\{x\}) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} > 0$

Επομένως σε κάθε στοιχείο του συνόλου $\{0,-1,-2,\dots\}$ αποδίδεται αυστηρά θετική πιθανότητα και επιπλέον:

$$P_{X_1}(\{0,-1,-2,\dots\}) = P(X_1^{-1}(\{0,-1,-2,\dots\}))$$
$$= P(\{0,1,2,\dots\}) = P(supp(P)) = 1$$

Άρα $supp(P_{X_1}) = \{0,-1,-2,\dots\}$

β. Η συνάρτηση πιθανότητας θα ορίζεται ως

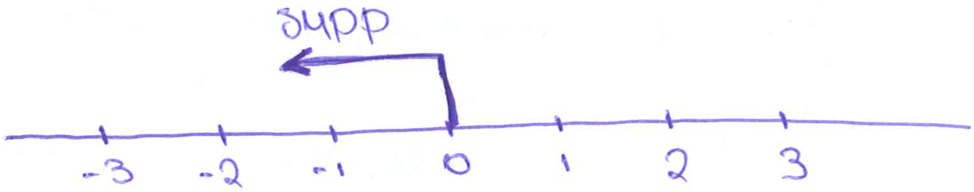
$$P_{X_1}(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{|x|}}{|x|!} \quad \text{με } supp(P_{X_1}) \to [0,1]$$

γ. Η αθροιστική συνάρτηση της P_{X_1} θα ορίζεται ως:

$$F_{X_1}(x) = P_{X_1}((-\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R}$$

όπου θα ισχύει $P_{X_1}((-\infty, x]) = P_{X_1}((-\infty, x] \cap supp(P_{X_1}))$.

Παίρνοντας περιπτώσεις θα έχουμε:



· $x = -2.75$

$$F_{X_1}(-2.75) = P_{X_1}((-\infty, -2.75] \cap supp(P_{X_1}))$$
$$= P_{X_1}(\{-3\}) + P_{X_1}(\{-4\}) + \dots$$

4a

· Για $x=-2$

$$F_{X_1}(-2) = P_{X_1}((-\infty,-2] \cap supp(P_{X_1}))$$
$$= P_{X_1}(\{-2\}) + P_{X_1}(\{-3\}) + \dots$$

· Για $x=0$

$$F_{X_1}(0) = P_{X_1}((-\infty,0] \cap supp(P_{X_1}))$$
$$= P_{X_1}(supp(P_{X_1})) = 1$$

· Για $x=2$

$$F_{X_1}(2) = P_{X_1}((-\infty,2] \cap supp(P_{X_1}))$$
$$= P_{X_1}(supp(P_{X_1})) = 1$$

Επομένως

$$F_{X_1}(x) = \sum_{i=-\infty}^{\lfloor x \rfloor} P_{X_1}(\{i\}), \quad x<0 \;\Big|\; F_{X_1}(x)=1, x\geq 0$$

όπου $\lfloor x \rfloor$, ο μεγαλύτερος αρνητικός ακέραιος μικρότερος ή ίσος του x.

π.χ. $x=-2.75 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = \lfloor -2.75 \rfloor = -3$

$x=-2 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = \lfloor -2 \rfloor = -2$

$x=0 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = \lfloor 0 \rfloor = 0$

$x=2 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = \lfloor 2 \rfloor = 0$

• $x \geq 0$

$P_{X_1}\big((-\infty, x] \cap supp(P_{X_1})\big) = P_{X_1}\big(supp\, P_{X_1}\big) = 1$

• $-1 \leq x < 0$

$P_{X_1}\big((-\infty, x] \cap supp(P_{X_1})\big) = P_{X_1}\big(supp(P_{X_1}) - \{0\}\big) = 1 - P(\{0\})$

• $-2 \leq x < -1$

$P_{X_1}\big((-\infty, x] \cap supp(P_{X_1})\big) = P_{X_1}\big(supp(P_{X_1}) - \{0, -1\}\big) = 1 - P(\{0\}) - P(\{1\})$

• $-3 \leq x < -2$

$P_{X_1}\big((-\infty, x] \cap supp(P_{X_1})\big) = P_{X_1}\big(supp(P_{X_1}) - \{0, -1, -2\}\big)$

$= 1 - P(\{0\}) - P(\{1\}) - P(\{2\})$

$$F_{X_1}(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \geq 0 \\ 1 - \sum_{i=0}^{\lfloor +x \rfloor} P_{X_1}(\{-i\}), & \text{αλλιώς} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \geq 0 \\ 1 - e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\lfloor +x \rfloor} \frac{\lambda^i}{i!}, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

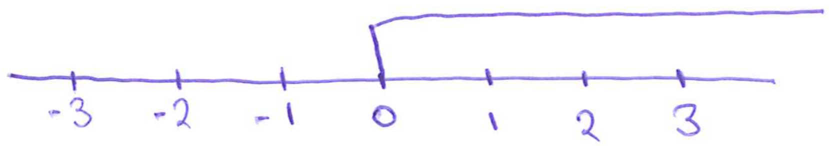
έχουμε $(-\infty, x] \cap \mathbb{Z}^- = (-\infty, x] \cap \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0\}$

$$= \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & x < 0 \\ \mathbb{Z}^-, & x \geq 0 \end{cases}$$

*όπου $\lfloor x \rfloor$ είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος μικρότερος ή ίσος του x

Έχουμε

$$F_{X_1}(x) = \begin{cases} P_{X_1}(\{\dots, -n, \dots, \lfloor x \rfloor\}), & x < 0 \\ P_{X_1}(\mathbb{Z}^-), & x \geq 0 \end{cases}$$



Αντικατοπτρίζω στον θετικό ημιάξονα θέλω όταν μου δώσουν $x = 1.75$, η $F_{X_1}(1.75)$ να μου δίνει ότι μου έδινε η $F_{X_1}(-1.75)$

Δηλαδή: $x = 1.75$

$$F_{X_1}(1.75) = P_{X_1}(\{-2\}) + P_{X_1}(\{-3\}) + \dots$$

- $x = 1$

$$F_{X_1}(1) = P_{X_1}(\{-1\}) + P_{X_1}(\{-2\}) + \dots$$

- $x = 0$

$$F_{X_1}(0) = P_{X_1}(\{0\}) + P_{X_1}(\{-1\}) + \dots = 1$$

- $x = -2$

$$F_{X_1}(-2) = P_{X_1}(\{0\}) + P_{X_1}(\{-1\}) + \dots = 1$$

$$F_{X_1} = \sum_{j=[-x^*]}^{\infty} P_{X_1}(\{-j\})$$

όπου $[-x^*]$ ο μικρότερος φυσικός μεγαλύτερος ή ίσος του $-x$

Επομένως

$$F_{X_1}(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ \sum_{j=[-x^*]}^{\infty} P_{X_1}(\{-j\}), & x > 0 \end{cases}$$

Poisson από Μεταφορά (για το σπίτι)

Έστω χώρος πιθανότητας $(\mathbb{R}, \Sigma_{\mathbb{R}}, P)$

$\operatorname{supp}(P) = \{0, 1, 2, \dots\}$, $P(\{x\}) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$ $\forall x \in \operatorname{supp}(P)$

$\lambda \in (0, +\infty)$

Έστω τυχαία μεταβλητή $X_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ όπου $X_2(z) = z^2$

Να βρεθούν:

α. το στήριγμα

β. η συνάρτηση πιθανότητας

γ. η αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας που προκύπτει, έστω P_{X_2}, από τη μεταφορά της P μέσω της X_2.

α. Για $\forall x \in \operatorname{supp}(P)$ ισχύει $X_2(x) = x^2$

άρα $X_2^{-1}(x) = x$

$\forall x \in \operatorname{supp}(P)$:

$X_2(0) = 0$, $X_2^{-1}(0) = 0$

$X_2(1) = 1$, $X_2^{-1}(1) = \pm 1$

$X_2(2) = 4$, $X_2^{-1}(2) = \pm 2$

$X_2(3) = 9$, $X_2^{-1}(3) = \pm 3$

· κρατάω μόνο τα θετικά επειδή $\operatorname{supp}(P) = \{0, 1, 2, \dots\}$

· παρατηρώ ότι οι αντίστροφες εικόνες των $\{0, 1, 4, \dots\}$ σχηματίζουν το $\operatorname{supp} P = \{0, 1, \dots\}$

Αφού η X_2 είναι τυχαία μεταβλητή θα ισχύει

$P_{X_2}(A) = P(X_2^{-1}(A))$ $\forall A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$. Παρατηρούμε ότι

$\forall x \in \operatorname{supp}(P)$, $P_{X_2}(\{x^2\}) = P(X_2^{-1}(\{x^2\})) = P(\{x\}) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} > 0$

Σε κάθε στοιχείο του συνόλου $\{0,1,4,9,\dots\}$ αποδίδεται αυστηρά θετική πιθανότητα

$$P_{X_2}(\{0,1,4,\dots\}) = P(X_2^{-1}\{0,1,4,\dots\})$$

$$= P(\{0,1,2,\dots\}) = P(supp(P)) = 1$$

Άρα $supp(P_{X_2}) = \{0,1,4,9,\dots\}$

β. η συνάρτηση πιθανότητας θα ορίζεται ως

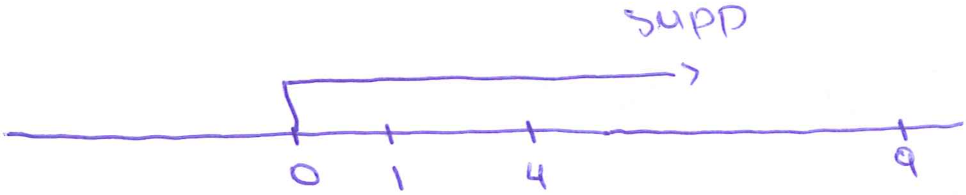
$$P_{X_2}(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}!} \quad \text{με } supp(P_{X_2}) \to [0,1]$$

γ. η αθροιστική συνάρτηση της P_{X_2} θα ορίζεται ως

$$F_{X_2}(x) = P_{X_2}((-\infty,x]),\ x \in \mathbb{R}$$

όπου θα ισχύει

$$P_{X_2}((-\infty,x]) = P_{X_2}((-\infty,x] \cap supp(P_{X_2}))$$



Για $x=2$

$$F_{X_2}(2) = P_{X_2}\big((-\infty,2] \cap supp(P_{X_2})\big)$$
$$= P_{X_2}(\{0,1\})$$
$$= P(\{0\}) + P(\{1\})$$

Για $x=8$

$$F_{X_2}(8) = P_{X_2}\big((-\infty,8] \cap supp(P_{X_2})\big)$$
$$= P_{X_2}(\{0,1,4\})$$
$$= P(\{0\}) + P(\{1\}) + P(\{4\})$$

Για $x=-2$

$$F_{X_2}(-2) = P_{X_2}\big((-\infty,-2] \cap supp(P_{X_2})\big)$$
$$= P_{X_2}(\emptyset)$$
$$= P(\{\emptyset\}) = 0$$

Άρα $F_{X_2}(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \sum_{i=0}^{[x^*]} P(\{i^2\}), & x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \sum_{i=0}^{[x^*]} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{i^2}}{i^2!} \end{cases}$

$F_{X_2}(x) = 0$

$F_{X_2}(x^2)$

$$= \begin{cases} F_{X_2}(x) = 0, & x < 0 \\ \sum_{i=0}^{\lfloor \sqrt{x} \rfloor} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\underset{F_{X_2}(\sqrt{x})}{\shortparallel}$$