Στατιστική ΙΙ
Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνων
Τμήμα Οικονομικής Επιστήμης

Επίκουρος Καθηγητής : Αρβανίτης Στυλιανός Stelios@aueb.gr
Βοηθός Μαθήματος : Λιόντος Γεώργιος liontosgeo@aueb.gr

Φροντιστήριο 1ο

05/03/2018

1. **<u>Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων</u>**
    1. Χώροι Πιθανότητας
    2. Μετρήσιμος Χώρος
    3. Μέτρο (Κατανομή) Πιθανότητας
    4. Πορίσματα
    5. Παραδείγματα
2. **<u>Τυχαία Μεταβλητή</u>**
    1. Ορισμός
    2. Παράδειγμα
3. **<u>Αντίστροφη Εικόνα</u>**
    1. Ορισμός
    2. Παράδειγμα
4. **<u>Κατανομές από Μεταφορά</u>**
    1. Ορισμός
    2. Παράδειγμα

1.Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων

→Η θεωρία μέτρου αποδίδει κάποια έννοια μεγέθους σε κομμάτια ενός συνόλου(π.χ. μήκος, εμβαδόν, όγκος)

1. Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων

1. Χώροι Πιθανότητας

Ω : σύνολο αναφοράς

Σ_Ω: συλλογή μετρήσιμων υποσυνόλων του Ω

- Στόχος είναι να αποδώσουμε πιθανότητα σε κομμάτια αυτού του συνόλου αναφοράς.
- Γνωρίζουμε ότι, $\Omega, \emptyset \in \Sigma_\Omega$ αφού $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$.
- Όταν το Ω είναι πεπερασμένο το Σ_Ω μπορεί να αποτελείται από όλα τα υποσύνολα του Ω.
- Το Σ_Ω θα περιέχει ανοιχτά διαστήματα $(\, , \,)$, κλειστά διαστήματα $[\, , \,]$, ενώσεις $\cup$, τομές $\cap$, μονοσύνολα $\{ \ \}$, κλπ.

1. Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων

2. Μετρήσιμος Χώρος

- Ως μετρήσιμος χώρος νοείται μία δυάδα (π.χ. (Ω, Σ_Ω)), στην οποία μπορούμε να αποδώσουμε κάποια έννοια μεγέθους

- Η δυάδα (Ω, Σ_Ω), περιλαμβάνει όση πληροφορία χρειαζόμαστε προκειμένου να δούμε που μπορούμε να ορίσουμε κατανομή πιθανότητας

Σημείωση: Σε οποιονδήποτε Ευκλείδιο χώρο (π.χ. $\mathfrak{R}^n$) ισχύει ό,τι ισχύει και στον $\mathfrak{R}$ περί μετρησιμότητας.

1. Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων

3. Μέτρο (Κατανομή) Πιθανότητας

Τι είναι το μέτρο ή αλλιώς κατανομή πιθανότητας;

- Πρόκειται για ένα μηχανισμό που προσδίδει πιθανότητα σε ένα κομμάτι του Ω($\in \Sigma_\Omega$).

<u>Ορισμός:</u> Δεδομένου του (Ω, Σ_Ω), μια κατανομή πιθανότητας στον Ω θα είναι μια συνάρτηση

$$P : \Sigma_\Omega \rightarrow [\,0\,,1\,]$$

i. $P(\Omega) = 1$

ii. Αν $A_1, A_2, \ldots, \in \Sigma_\Omega$ και $A_i \cap Aj = \emptyset,\ i \neq j$ τότε

$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$ *(αριθμημένη προσθετικότητα)*

1. Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων

4. Πορίσματα

Πόρισμα 1. Για κάθε $A, B \in \Sigma_\Omega$, $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B') = P(A \cap B) + P(A - B)$

Πόρισμα 2. Για κάθε $A \in \Sigma_\Omega$, $P(A') = 1 - P(A)$

Πόρισμα 3. $P(\emptyset) = 0$

Πόρισμα 4. Για κάθε $A_1, A_2 \in \Sigma_\Omega$, $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow P(A_1) \leq P(A_2)$, Μονοτονία Κατανομής

Πόρισμα 5. Για κάθε $A \in \Sigma_\Omega$, $0 \leq P(A) \leq 1$

Πόρισμα 6. Για κάθε $A_1, A_2 \in \Sigma_\Omega$, $P(A_2 - A_1) = P(A_2) - P(A_2 \cap A_1)$

Πόρισμα 7. Για κάθε $A_1, A_2 \in \Sigma_\Omega$, $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$

Πόρισμα 8. Για κάθε $A_1, A_2 \in \Sigma_\Omega$, $P(A_1 \cup A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$

1. Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων

5. Παραδείγματα

1. $\Omega = \{\mathrm{K}\}, \;\; \Sigma_{\Omega} = \{\emptyset, \Omega\}, \; \mathrm{P}(\{\mathrm{K}\}) = \mathrm{P}(\Omega) = 1$

2. $\Omega = \{\mathrm{K}, \Gamma\}, \;\; \Sigma_{\Omega} = \{\emptyset, \{\mathrm{K}\}, \{\Gamma\}, \Omega\}$

3. $\Omega = \Re$

2. Τυχαία Μεταβλητή

1. Ορισμός

- Η τυχαία μεταβλητή είναι πραγματική συνάρτηση η οποία δημιουργεί αντιστοιχία μεταξύ των μετρήσιμων υποσυνόλων των πραγματικών (πεδίο τιμών) και αυτών του Ω(πεδίο ορισμού της).

<u>Ορισμός:</u> Έστω οι μετρήσιμοι χώροι $(\Omega, \Sigma_{\Omega})$ και $(\Re, \Sigma_{\Re})$. Τυχαία μεταβλητή θα ονομάζεται όποια συνάρτηση $X : \Omega \to \Re$ τέτοια ώστε αν $A \in \Sigma_{\Re}$ τότε $X^{-1}(A) \in \Sigma_{\Omega}$.

$X^{-1}(A)$: εκείνα τα στοιχεία του Ω στα οποία όταν υπολογιστεί η X, μας δίνει κάποιο στοιχείο του A

2. Τυχαία Μεταβλητή

2. Παράδειγμα

1. Έστω $\Omega = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$, $\Sigma_\Omega = \big\{\varnothing, \Omega, \{\mathrm{a}\}, \{\mathrm{b}\}\big\}$, $X : \Omega \to \Re$ με $X(a) = 0$, $X(b) = 1$
2. Έστω $\Omega = \{\mathrm{K}\}$, $\Sigma_\Omega = \{\varnothing, \Omega\}$, $X : \Omega \to \Re$

- Υπό ποιες προϋποθέσεις η Χ είναι τυχαία μεταβλητή;

3. Αντίστροφη Εικόνα

1. Ορισμός

Έστω συνάρτηση $f \ : \ \Omega \ \rightarrow \ \Re$, τότε ορίζεται η αντίστροφη εικόνα του A, μέσω της f, ως το σύνολο των σημείων του Ω τα οποία απεικονίζονται μέσω της f στο A.

$$f^{-1}(A) = \{ \ \omega \in \Omega : \ f(\omega) \in A \ \}$$

3. Αντίστροφη Εικόνα

2. Παράδειγμα

- Έστω $\Omega = \Re$ και $f(x) = x^2$. Να βρεθούν οι αντίστροφες εικόνες του Α, όταν:
- $\mathrm{A} = \{0\}$
- $\mathrm{A} = \{1\}$
- $\mathrm{A} = [1,4]$
- $\mathrm{A} = (-\infty, 0)$
- $\mathrm{A} = \Re$
- $\mathrm{A} = \varnothing$

4. Κατανομές από Μεταφορά

1. Ορισμός

Οι τυχαίες μεταβλητές μεταφέρουν τις κατανομές πιθανότητας στους πραγματικούς. Αν θέλουμε να αποδώσουμε πιθανότητα σε ένα μετρήσιμο υποσύνολο των πραγματικών βρίσκουμε την αντίστροφη εικόνα αυτού μέσω της X και αποδίδουμε σε αυτή την πιθανότητα μέσω της κατανομής που υπάρχει ήδη στον Ω.
-1

<u>Ορισμός:</u> Έστω ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \Sigma_{\Omega}, P)$, ο μετρήσιμος χώρος $(\Re, \Sigma_{\Re})$ και τυχαία μεταβλητή X. Το ζεύγος P, X μονοσήμαντα προσδιορίζει κατανομή στο , έστω P^{*} που ορίζεται ως εξής:

$$\text{Αν } A \in \Sigma_{\Re}, \text{ τότε } P^{*}(A) := P(X^{-1}(A))$$

4. Κατανομές από Μεταφορά

2. Παράδειγμα

Να βρεθεί το P^* όταν

$$\Omega = \{\mathrm{K}, \Gamma\}, \qquad P(\{\mathrm{K}\}) = 1/3, \qquad X(K) = 3, \qquad X(\Gamma) = 4$$

Βήμα 1ο : Βρίσκουμε $\Sigma_\Omega, P(\{\Gamma\})$

Βήμα 2ο : Υπολογίζουμε την αντίστροφη εικόνα $X^{-1}(A)$

Βήμα 3ο : Υπλογίζουμε το $P^*(A)$