Τυχαίες Μεταβλητές και Κατανομές από Μεταφορά και Ασκήσεις

Τα παρακάτω βρίσκονται σε στάδιο διαρκούς διόρθωσης και δεν υποκαθιστούν τις διαλέξεις. Παρακαλώ αναφέρετε όποια παραδρομή στο stelios@aueb.gr ή στο e-class του μαθήματος.

Στέλιος Αρβανίτης

Τυχαίες Μεταβλητές

Ασχοληθήκαμε με την έννοια της τυχαίας μεταβλητής. Αυτή είναι πολλαπλά χρήσιμη επειδή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή κατανομών στους πραγματικούς, επειδή συνδέεται με την έννοια του δείγματος στην στατιστική επαγωγή, κ.ο.κ. Προκειμένου να την ορίσουμε ασχοληθήκαμε καταρχάς με την έννοια της αντίστροφης εικόνας.

Ορίσαμε την τυχαία μεταβλητή ως μια πραγματική συνάρτηση η δημιουργεί αντιστοιχία μεταξύ των μετρήσιμων υποσυνόλων των πραγματικών (πεδίο τιμών της) και αυτών του Ω (πεδίο ορισμού της).

ΟΡΙΣΜΟΣ. Έστω οι μετρήσιμοι χώροι $(\Omega, \Sigma_{\Omega})$ και $(\mathbb{R}, \Sigma_{\mathbb{R}})$. Τυχαία μεταβλητή θα ονομάζεται όποια συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε αν $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ τότε $X^{-1}(A) \in \Sigma_{\Omega}$, δηλαδή οτιδήποτε μπορεί να μετρηθεί στο $\mathbb{R}$ έχει προκύψει ως εικόνα μέσω της X από κάτι που μπορεί να μετρηθεί στον Ω.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. $\Omega = \{a, b\}$, $\Sigma_{\Omega} = \{\emptyset, \Omega, \{a\}, \{b\}\}$, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ με $X(a) = 0$, $X(b) = 1$, οπότε έχουμε ότι αν $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ τότε και $X^{-1}(A) = \begin{cases} \emptyset, & 0, 1 \notin A \\ \{a\}, & 0 \in A, 1 \notin A \\ \{b\}, & 0 \notin A, 1 \in A \\ \Omega, & 0, 1 \in A \end{cases}$, οπότε αφού $\emptyset, \Omega, \{a\}, \{b\} \in \Sigma_{\Omega}$, η X είναι τυχαία μεταβλητή.

ΠΑΡΑΤΗΡΉΣΕΙΣ:

1. Όταν το Ω είναι πεπερασμένο, οπότε το Σ_{Ω} μπορεί να επιλεγεί ώστε να εμπεριέχει όλα τα υποσύνολα του Ω, τότε κάθε συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι τυχαία μεταβλητή αφού αν $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ το $X^{-1}(A) \subseteq \Omega$ οπότε και ανήκει στο Σ_{Ω}.

2. Υπάρχουν πραγματικές συναρτήσεις που δεν είναι τυχαίες μεταβλητές. Π.χ. όταν $(\Omega, \Sigma_{\Omega}) = (\mathbb{R}, \Sigma_{\mathbb{R}})$, γνωρίζουμε ότι υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}$ με $A \notin \Sigma_{\mathbb{R}}$ (μη μετρήσιμο υποσύνολο των πραγματικών). Έστω η $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$.

Έχουμε ότι $\{1\} \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ αλλά $X^{-1}(\{1\}) = A \notin \Sigma_{\mathbb{R}}$. Συνεπώς η X δεν είναι τυχαία μεταβλητή. Δηλαδή η ύπαρξη μη μετρήσιμων συνόλων συνεάγεται την ύπαρξη συναρτήσεων που δεν είναι τυχαίες μεταβλητές. Επομένως η έννοια δεν είναι τετριμμένη.

3. Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι κάθε συνεχής, παραγωγίσιμη κ.ο.κ. πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ είναι τυχαία μεταβλητή. Συνεπώς οι "οικείες" στην μαθηματική ανάλυση που έχουμε συναντήσει συναρτήσεις, έχουν την παραπάνω ιδιότητα.

Κατανομές από Μεταφορά

Οι τυχαίες μεταβλητές μεταφέρουν τις κατανομές πιθανότητας στους πραγματικούς. Η διαδικασία είναι απλή. Αν θέλουμε να αποδώσουμε πιθανότητα σε ένα μετρήσιμο υποσύνολο των πραγματικών, βρίσκουμε την αντίστροφη εικόνα αυτού μέσω της X και αποδίδουμε σε αυτή την πιθανότητα μέσω της κατανομής που ήδη υπάρχει στον Ω.
ΟΡΙΣΜΟΣ. Έστω ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \Sigma_\Omega, \mathbb{P})$, ο μετρήσιμος χώρος $(\mathbb{R}, \Sigma_{\mathbb{R}})$ και τυχαία μεταβλητή X. Το ζεύγος $\mathbb{P}, X$ μονοσήμαντα προσδιορίζει κατανομή στο $\mathbb{R}$, έστω $\mathbb{P}^\star$ που ορίζεται ως εξής: αν $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$, τότε $\mathbb{P}^\star(A) := \mathbb{P}\left(X^{-1}(A)\right)$.
ΠΑΡΑΤΗΡΉΣΕΙΣ:

1. Η $\mathbb{P}^\star$ είναι καλώς ορισμένη κατανομή στο $\mathbb{R}$ εξαιτίας του ότι η $\mathbb{P}$ είναι καλώς ορισμένη κατανομή στον Ω, η X τυχαία μεταβλητή και των ιδιοτήτων της αντίστροφης εικόνας. Ονομάζεται κατανομή από μεταφορά στο $\mathbb{R}$ της $\mathbb{P}$ μέσω της X.

2. Συνήθως η $\mathbb{P}^\star$ ονομάζεται (αγνοώντας την υφιστάμενη $\mathbb{P}$) ως η κατανομή που ακολουθεί η X ($X \sim \mathbb{P}^\star$).

3. Εφόσον μπορούμε να μεταφέρουμε κατανομές στους πραγματικούς μέσω τυχαίων μεταβλητών μπορούμε καταρχάς να μελετούμε κατανομές πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ όπου και υπάρχει πλούσια μαθηματική δομή. Επειδή όμως το είναι εξαιρετικά πολύπλοκο μας χρειάζονται τρόποι αναπαράστασης των κατανομών αυτών από πιο οικεία αντικείμενα που προκύπτουν στα πλαίσια της μαθηματικής μας ανάλυσης, για την κατασκευή των οποίων θα χρησιμοποιήσουμε μέρος αυτής της δομής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. $\Omega = \{a, b\}, \Sigma_\Omega = \{\emptyset, \Omega, \{a\}, \{b\}\}, q \in (0,1), \mathbb{P}(B) = \begin{cases} 0, & B = \emptyset \\ 1, & B = \Omega \\ q, & B = \{a\} \\ 1-q, & B = \{b\} \end{cases}$,
$X : \Omega \to \mathbb{R}$ με $X(a) = 0$, $X(b) = 1$, οπότε έχουμε ότι αν $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ τότε και $\mathbb{P}^\star(A) :=$

$$\mathbb{P}\left(X^{-1}(A)\right) = \begin{cases} \mathbb{P}(\emptyset), & 0,1 \notin A \\ \mathbb{P}(\{a\}), & 0 \in A, 1 \notin A \\ \mathbb{P}(\{b\}), & 0 \notin A, 1 \in A \\ \mathbb{P}(\Omega), & 0,1 \in A \end{cases} = \begin{cases} 0, & 0,1 \notin A \\ q, & 0 \in A, 1 \notin A \\ 1-q, & 0 \notin A, 1 \in A \\ 1, & 0,1 \in A \end{cases}.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΉΣΕΙΣ:

1. Στα επόμενα για λόγους συμβολικής απλότητας θα χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό για τις $\mathbb{P}$ και $\mathbb{P}^{\star}$, ενώ αν μας ενδιαφέρει μόνο η τελευταία μπορούμε να ξεχάσουμε και την $\mathbb{P}$ αλλά και την X.

2. Στο προηγούμενο παράδειγμα η $\mathbb{P}^{\star}$ περιγράφηκε εύκολα χωρίς την ανάγκη περαιτέρω εννοιών. Ανήκει στην κατηγορία των διακριτών κατανομών.