Φραγή των Εφικτών Ροών Διαχρονικής Κατανάλωσης

Υπενθυμίζεται ότι στο παράδειγμα που έχουμε κατασκευάσει και δεδομένων των $k_0>0$ (Εξωγενώς προικοδότηση) και $k_t \to k_t^{\alpha}$, $t\in\mathbb{N}$, $\alpha\in(0,1]$ (Εξωγενώς και σταθερή στο χρόνο τεχνολογία στοιχειώδους μετασχηματισμού των πόρων) το εφικτό σύνολο είναι το:

$$\mathcal{E}\Sigma(k_0,\alpha) := \{ (c_t),\ c_t \geq 0,\ c_t + k_{t+1} \leq k_t^{\alpha},\ t\in\mathbb{N} \}$$

Το αποτέλεσμα παρακάτω μας λέει ότι αυτό θα αποτελείται από φραγμένες πραγματικές ακολουθίες.

Λήμμα [Φραγή εφικτών διαχρονικών ροών κατανάλωσης]. Αν $(c_t)\in\mathcal{E}\Sigma$ τότε η (c_t) είναι φραγμένη.

Απόδειξη. Αν $(c_t)\in\mathcal{E}\Sigma$ τότε $\left.\begin{array}{l} c_t \geq 0 \\ c_t + k_{t+1} \leq k_t^{\alpha} \end{array}\right\}, t\in\mathbb{N} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq c_t \leq k_t^{\alpha} \\ 0 \leq k_{t+1} \leq k_t^{\alpha} \end{array}\right\}, t\in\mathbb{N} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0 \leq c_t \leq k_t^{\alpha},\ t\in\mathbb{N} \\ 0 \leq k_t \leq k_{t-1}^{\alpha},\ t\in\mathbb{N}^* \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0 \leq c_t \leq k_t^{\alpha}\quad t\in\mathbb{N} \\ 0 \leq k_t \leq k_{t-1}^{\alpha} \leq k_{t-2}^{\alpha^2} \leq \dots \leq k_0^{\alpha^t},\ t\in\mathbb{N}^* \end{array}\right\}$$

κάνοντας αναδρομικές αντικαταστάσεις. Αλλά επίσης $c_0 \leq k_0 = k_0^{\alpha^0}$, και επομένως

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq c_t \leq k_t^{\alpha} \\ 0 \leq k_t \leq k_0^{\alpha^t} \end{array}\right\}, t\in\mathbb{N} \Rightarrow 0 \leq c_t \leq \left(k_0^{\alpha^t}\right)^{\alpha},\ t\in\mathbb{N}$$

$\Rightarrow 0 \leq c_t \leq k_0^{\alpha^{t+1}}$ $t\in\mathbb{N}$. Συνεπώς η ακολουθία μη αρνητικών όρων (c_t) φράσσεται κατά σημείο από πάνω από την $(k_0^{\alpha^{t+1}})$. Συνεπώς αν η τελευταία είναι φραγμένη τότε είναι και η (c_t)

(γιατί;). Αλλά όταν $\alpha=1$, $k_0^{\alpha^{t+1}} = k_0^{\alpha} \to k_0^{\alpha}$ (γιατί;), ενώ αν $\alpha<1$ $k_0^{\alpha^{t+1}} \to k_0^{0} = 1$ (γιατί;). Επομένως η $\left(k_0^{\alpha^{t+1}}\right)$ είναι συγκλίνουσα και άρα φραγμένη (γιατί;). Άρα και η (k_t) φραγμένη, και αφού αυτή είναι αυθαίρετα επιλεγμένο στοιχείο του ΕΣ, αυτό ισχύει για κάθε στοιχείο του ΕΣ. □

Σχόλιο. Η απόδειξη παραπάνω μας λέει ότι όλα τα στοιχεία του εφικτού συνόλου έχουν κοινό φράγμα. Σε αυτή την περίπτωση το ΕΣ αναφέρεται ομοιόμορφα φραγμένο (uniformly bounded).

Άσκηση. Η ιδιότητα της φραγής θα εξακολουθεί να ισχύει αν ο μετασχηματισμός $k_t \to k_t^{\alpha}$ αντικατασταθεί με τον $k_t \to (1+r)k_t$, $t\in\mathbb{N}$, $r\geq 0$ ([illegible] ανατοκισμός με το διαχρονικά σταθερό καθαρό επιτόκιο r);