Ακολουθίες και Σειρές Πραγματικών Συναρτήσεων

Είδαμε την πραγματική ακολουθία ως "απειροδιάστατο διάνυσμα πραγματικών αριθμών ή ισοδύναμα συνάρτηση $\mathbb{N}\to\mathbb{R}$. Ο ορισμός γενικεύεται εύκολα αν γενικεύσουμε την φύση των στοιχείων του διανύσματος ή ισοδύναμα το πεδίο τιμών της συνάρτησης.

Ορισμός [Γενίκευση έννοιας Ακολουθίας] Έστω $Y\neq\emptyset$. Ακολουθία από στοιχεία του Y ονομάζεται όποια συνάρτηση $\mathbb{N}\to Y$ ή ισοδύναμα όποιο απειροδιάστατο διάνυσμα με στοιχεία του Y, που έχει πρώτο στοιχείο, πλήθος στοιχείων ίσο με των φυσικών. □

Παραδείγματα.

1. Όταν $Y=\mathbb{R}$ τότε επιστρέφουμε στην έννοια της πραγματικής ακολουθίας.
2. Όταν $Y=\mathbb{R}^k$, $k>1$ παίρνουμε την έννοια της ακολουθίας από k-διάστατα πραγματικά διανύσματα. Σε διανυσματική μορφή ένα τέτοιο αντικείμενο θα μοιάζει με

$$\left(\begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \\ \vdots \\ x_{k,0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{2,1} \\ \vdots \\ x_{k,1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \\ \vdots \\ x_{k,n} \end{pmatrix}\right) \sim$$

$$\begin{pmatrix} x_{1,0} & x_{1,1} & & x_{1,n} & \\ x_{2,0} & x_{2,1} & \cdots & x_{2,n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ x_{k,0} & x_{k,1} & & x_{k,n} & \end{pmatrix}, \quad x_{i,n}\in\mathbb{R}, \quad \forall i=1,\dots,k, \forall n\in\mathbb{N},$$

όπου το σύμβολο $\sim$ αναπαριστά κατάλληλη έννοια ισοδυναμίας. Προφανώς προκύπτει για "$k\times\infty$" πραγματική μήτρα.

3. Y = σύνολο των πραγματικών ακολουθιών. Συμπληρώστε και προσθαφαιρέστε, σε αναλογία με το προηγούμενο παράδειγμα να αναπαραστήστε ένα τέτοιο αντικείμενο ως μια "$\infty\times\infty$" πραγματική μήτρα.

Στα επόμενα θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με περιπτώσεις όπου το Y είναι σύνολο από πραγματικές συναρτήσεις ορισμένων επί μη κενού X.

Ορισμός [Γενίκευση του προηγούμενου]. Έστω Y = σύνολο των συναρτήσεων $X\to\mathbb{R}$ όπου $X\neq\emptyset$. Ακολουθία από πραγματικές συναρτήσεις επί του X θα είναι όποια συνάρτηση $\mathbb{N}\to Y$ ή ισοδύναμα απειροδιάστατο διάνυσμα με πρώτο στοιχείο και πλήθος στοιχείων όσο των φυσικών με στοιχεία συναρτήσεις $X\to\mathbb{R}$. □

Σχόλια:

Σ1. Μια τέτοια ακολουθία θα αναπαρίσταται ως διάνυσμα $(f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots)$ όπου $f_n: X\to\mathbb{R}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ή περισσότερο "μονοκομματικά" ως (f_n), $f_n: X\to\mathbb{R}$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Σ2. Η συνάρτηση $g:\mathbb{N}\to Y$, σε κάθε φυσικό n θα δίνει $g(n) = f_n$, όπου f_n όπως στο Σ1. Αυτό ορίζει

"διμεταβλητή" συνάρτηση $G(n,x) := f_n(x) \in\mathbb{R}$ όπου

$G(n,\cdot) = f_n(\cdot) : X \to \mathbb{R}$ και $G(\cdot,x) = f_\cdot(x) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Επομένως δυικά κάθε (f_n) μπορεί να ειδωθεί ως λίστα πραγματικών ακολουθιών, μία για κάθε δυνατή τιμή του X.

Παραδείγματα:

Ε1. $X = \{\alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_n(\alpha) = \alpha^n$. Επομένως εδώ $(f_n) = (\alpha^n)$ δηλαδή μία πραγματική ακολουθία. Βάσει του Σ3 αυτό συμβαίνει επειδή το X είναι μονοσύνολο.

Ε2. $X = \mathbb{R}$, $f_n(x) = \exp(n+x)$. Παρατηρούμε ότι $G(n,x) = \exp(n+x)$ ενώ $\forall x \in \mathbb{R}$ αποκτούμε την πραγματική ακολουθία (e^{n+x}) [π.χ. $x=0$, (e^n) κ.ο.κ.].

Ε3. $X = \mathbb{R}$, $f_n(x) = \exp(nx)$ [Συμπληρώστε αναλόγως με το παραπάνω].

Ε4. $X = \mathbb{R}$, $f_n(x) = \exp\left(\frac{x}{n+1}\right)$ [Συμπληρώστε αναλόγως με το Ε2.].

Ε5. $X=\mathbb{R}-\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, $f_n(x)=\frac{1}{n+1}\frac{1}{x}$

[και πάλι συμπληρώστε αναλόγως].

Σημειακό Όριο (Pointwise Limit)

Αναζητούμε έννοια ορίου για ακολουθίες πραγματικών συναρτήσεων όπως οι παραπάνω. Θα ασχοληθούμε με την έννοια του σημειακού ορίου καθώς αυτή προκύπτει φυσικά από την έννοια του ορίου πραγματικής ακολουθίας όπως την έχουμε αναπτύξει.

Ορισμός [Σημειακό Όριο] Έστω η ακολουθία (f_n), $f_n:X\to\mathbb{R}$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Θέτουμε $X^*:=\{x\in X:$ η πραγματική ακολουθία $(f_n(x))$ συγκλίνει$\}$. Η συνάρτηση σημειακό όριο της (f_n) θα ορίζεται ως $f:X^*\to\mathbb{R}$, με $f(x):=\lim f_n(x)$, $\forall x\in X^*$. Όταν $X^*=\emptyset$ τότε το σημειακό όριο δεν υπάρχει. □

Παρατήρηση. Ο παραπάνω ορισμός διευκολύνεται από την δυική εκδοχή της (f_n) ως λίστα $\{(f_n(x)), x\in X\}$ από πραγματικές ακολουθίες, μία για κάθε τιμή του X όπως αναπτύχθηκε στο Σ2.

Παραδείγματα.

Ε1. Εδώ έχουμε μόνο μία πραγματική ακολουθία και βλέπουμε ότι (γιατί;)

$$X^*=\begin{cases}\{a\} & a\in(-1,1]\\ \emptyset & a\notin(-1,1]\end{cases}.$$

Επομένως αν $\alpha \in [-1,1]$, $f:\{\alpha\} \to \mathbb{R}$ με $f(\alpha)=0$.

Ε2. $X^* = \emptyset$ (γιατί;) οπότε το όριο δεν υπάρχει.

Ε3. $X^* = (-\infty, 0]$ (συμπληρώστε) με $f:(-\infty,0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$.

Ε4. $X^* = \mathbb{R}$ (συμπληρώστε). με $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $f(x)=1$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ε5. $X^* = \mathbb{R}-\{0\}$ (συμπληρώστε). με $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$ και $f(x)=0$ $\forall x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

Παρατήρηση. Η έννοια του σημειακού ορίου είναι σχετικά ασθενής, και για αυτό δεν διατηρεί γενικά ιδιότητες που μπορεί να έχουν όλα τα μέλη της ακολουθίας όπως η συνέχεια, παραγωγισιμότητα κ.λ.π. Δείτε π.χ. το Ε3.

Σειρές Πραγματικών Συναρτήσεων

Επειδή στο παραπάνω το X είναι αυθαίρετο του, η και το πεδίο τιμών είναι το $\mathbb{R}$, οπότε είναι εφικτή η κατά σημείο πρόσθεση των συναρτήσεων (θυμηθείτε ότι αν $f,g:X\to\mathbb{R} \Rightarrow (f+g):X\to\mathbb{R}$ με $(f+g)(x):=f(x)+g(x)$ $\forall x\in X$) είναι εφικτή η κατά σημείο μερική άθροιση της (f_n) οπότε και αποκτάμε την έννοια της ακολουθίας μερικών αθροισμάτων $\left(\sum_{i=0}^{n} f_i\right)$ όπου $\sum_{i=0}^{n} f_i : X\to\mathbb{R}$ με $\left(\sum_{i=0}^{n} f_i\right)(x) := \sum_{i=0}^{n} f_i(x)$ $\forall x\in X$, η οποία είναι επί της

ουσίας λίστα από πραγματικές ακολουθίες μερικών αθροισμάτων. Προφανώς μέσω της κατασκευής του σημειακού ορίου ορίζεται η έννοια της σειράς πραγματικών συναρτήσεων.

Ορισμός [Σειρά Συναρτήσεων] Για την (f_n) η $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$ θα ορίζεται από $\sum_{i=0}^{\infty} f_i : X^* \to \mathbb{R}$ με $X^* = \{x \in X :$ η πραγματική σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} f_i(x)$ συγκλίνει$\}$ και $\left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i\right)(x) := \sum_{i=0}^{\infty} f_i(x) \ \forall x \in X^*$. $\square$

Στην ενασχόληση με τις πραγματικές σειρές ασχοληθήκαμε κυρίως με το αν έχουμε και όχι με το πού έχουμε σύγκλιση (θυμηθείτε τα ανάλογα ερωτήματα). Προφανώς αυτό διαφοροποιεί και την αναζήτηση μας για τα ανάλογα ερωτήματα αναφορικά με τις σειρές συναρτήσεων, εν προκειμένω, α. ποιό είναι το X^*, β. αν $X^* \neq \emptyset$ ποια είναι η $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$. Δεδομένων των όσων έχουμε κάνει μπορούμε να περιγράψουμε την παρακάτω διαδικασία για τον εντοπισμό του X^*.

Αλγόριθμος Εντοπισμού του X^* για την $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$.

1. Για τα $x \in X$ όπου είναι εφικτό κατασκευάζουμε τους $\dfrac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|}$ και βρίσκουμε το όριο ως προς το n, έστω $\ell(x)$.

2. Αν $l(x)$ $<1 \Rightarrow x \in X^*$.

$>1 \Rightarrow x \notin X^*$

$=1 \Rightarrow$ δεν γνωρίζουμε.

3. Για τα $x \in X$ για τα οποία είτε δεν είναι εφικτή η κατασκευή των πηλίκων για άπειρο πλήθος από n, είτε $l(x)=1$, είτε το $l(x)$ δεν υπάρχει και από όσα έχουμε περιγράψει για το κριτήριο του πηλίκου δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα, χρησιμοποιούμε πληροφορία εκτός του κριτηρίου, εφόσον μας είναι ευχερής προκειμένου να διαπιστώσουμε αν $x \in X^*$.

Η παραπάνω διαδικασία είναι δυνατόν να μπορεί να εντοπίσει μόνο υποσύνολο του X^* εξαιτίας των δυσκολιών στο βήμα 3. Προφανώς δεν μπορεί και να αποκλείσει στο B. Θα δούμε όμως ότι θα μας είναι σχετικά επαρκής ως προς τα όσα θα δούμε για τις δυναμο-σειρές.

Παραδείγματα.

ΣΣ1. Έστω $X=\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Αν $x=0$ έχουμε ότι το κριτήριο είναι μη εφαρμόσιμο. Παρόλα αυτά έχουμε ότι $\sum_{i=0}^{\infty} x^i \Big|_{x=0} = 0^0+0^1+\ldots+0^n+\ldots=1$

οπότε $0\in X^*$. Για $x\neq 0$ έχουμε ότι $\frac{|x^{n+1}|}{|x^n|}=|x|\to|x|$.

Επομένως αν $|x|<1$ $(x\neq 0)$ έχουμε απόλυτη σύγκλιση και $x\in X^*$. Συνεπώς $\{0\}\cup(-1,0)\cup(0,1)=(-1,1)\subseteq X^*$.

Τέλος βάσει των όσων γνωρίζουμε για τις γεωμετρικές σειρές έχουμε ότι οι $\sum_{i=0}^{\infty} 1^i$ κ' $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i$ αποκλίνουν επομένως $1,-1\notin X^*$. Οπότε $X^*=(-1,1)$. Σημειώνουμε ότι επειδή η $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$ είναι λίστα από γεωμετρικές σειρές έχουμε ότι $X^*=(-1,1)$ και $\sum_{i=0}^{\infty} x^i=\frac{1}{1-x}$ $\forall x\in X^*$. $\square$

ΣΣ2. $X=\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{x^n}{n!}$. Όταν $x=0$ το κριτήριο δεν εφαρμόζεται αλλά και πάλι έχουμε ότι $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}\Big|_{x=0}=1$ (γιατί;) οπότε $0\in X^*$.

Όταν $x \neq 0$, $\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \frac{|x^{n+1}/(n+1)!|}{|x^n/n!|} = |x| \frac{1}{n+1} \to 0$

$\forall x \neq 0$. Επομένως αν $x=0$ ή $x \neq 0$, $x \in X^* \Rightarrow X^* = \mathbb{R}$. □

223. $X = \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n+1} e^{nx}$. Το κριτήριο είναι εφαρμόσιμο $\forall x \in \mathbb{R}$ οπότε $\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \frac{|\frac{1}{n+2} e^{(n+1)x}|}{|\frac{1}{n+1} e^{nx}|}$

$= \frac{n+1}{n+2} e^{(n+2-n-1)x} = \frac{n+1}{n+2} e^x \to e^x$. Επομένως αν $e^x < 1$

$\Leftrightarrow x < 0 \Rightarrow x \in X^*$, αν $e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0 \Rightarrow x \notin X^*$

ενώ αν $x=0$, $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} e^{ix} \Big|_{x=0} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1}$ που αποκλίνει

επομένως $0 \notin X^*$. Άρα $X^* = (-\infty, 0)$. □

224 $X = \mathbb{R}$, $f_n(x) = n! e^{nx}$. Το κριτήριο είναι εφαρμόσιμο $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \frac{(n+1)! e^{(n+1)x}}{n! e^{nx}} = (n+1) e^x$

που αποκλίνει προς το $+\infty$. Επομένως (γιατί;)

$X^* = \emptyset$ και η $\sum_{i=0}^{\infty} i! e^{ix}$ δεν είναι καλώς ορισμένη

πραγματική συνάρτηση. □

ΣΖ5. $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{1}{x^n}$ το κριτήριο είναι εφαρμόσιμο $\forall x \in X$, $\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} =$

$$= \frac{\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} \frac{1}{x^{n+1}} \right|}{\left| \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{1}{x^n} \right|} = \frac{n+1}{n+2} |x|^{-1} \to |x|^{-1}.$$

Επομένως

$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \subseteq X^*$, αν $|x| < 1 \Rightarrow x \notin X^*$, αν $x = 1$

$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} \frac{1}{x^i} \Big|_{x=1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1}$ που συγκλίνει (γιατί;), οπότε $1 \in X^*$, ενώ όταν $x = -1$ έχουμε απόκλιση (συμπληρώστε).

Άρα $X^* = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$. $\square$