Παραδείγματα Χρήσης Πραγματικών Ακολουθιών και Σειρών σε Απλά Υποδείγματα στα Χρηματοοικονομικά.

Τα παρακάτω αποτελούν παραδείγματα «φυσικής» εμφάνισης της έννοιας της σειράς στα πλαίσια των οικονομικών, εξαιτίας της λειτουργίας διαδικασιών σώρευσης σε υπόβαθρο διαχρονικής οικονομίας που λειτουργεί σε άπειρο πλήθος χρονικών στιγμών (οι οποίες είναι δυνατόν απλώς να επισημαίνουν διατεταγμένες στον χρόνο συναλλαγές και για τις οποίες να μην υπάρχει κάποιο φυσικό άνω φράγμα). Μάλιστα όταν τα παραδείγματα εξειδικεύονται σε συγκεκριμένες διαδικασίες «ανατοκισμού-προεξόφλησης» τότε εκεί είναι δυνατόν να εμφανίζεται η γεωμετρική σειρά ή παραλλαγές της.

Α. Τιμολόγηση Χρηματοοικονομικών Τίτλων

Το υπόβαθρο μελέτης είναι το εξής:

Έστω οικονομία που «ζει» σε διακριτό χρόνο $t = 0, 1, 2, \dots$ *όπου η χρονική στιγμή 0 αναπαριστά το παρόν. Χρηματοοικονομικός τίτλος που εκδίδεται στο παρόν, θα είναι όποια ακολουθία* (A_t) *όπου ο αριθμός* A_t *είναι χρηματική απόδοση που υπόσχεται ο εκδότης κατά την χρονική στιγμή t. Η διάρκεια του τίτλου είναι το μικρότερο n για το οποίο* $A_t = 0,\ \forall t > n$. *Όταν δεν υπάρχει τέτοιο n τότε ο τίτλος ονομάζεται διηνεκής.*

Ο παραπάνω ορισμός χρηματοοικονομικού τίτλου θα είναι επαρκής όσον αφορά στο ζήτημα τιμολόγησης. Προφανώς δεν περιλαμβάνει σημαντικά νομικά χαρακτηριστικά τίτλων όπως ιδιοκτησία κ.ο.κ. Επίσης στο υπόβαθρο που εξετάζουμε δεν υπάρχει αβεβαιότητα. Μέσω επέκτασης της παραπάνω έννοιας είναι δυνατόν να εξετασθούν και τέτοιες σημαντικές λεπτομέρειες.

Τιμολόγηση του παραπάνω θα είναι όποια ***συνάρτηση*** *δέχεται την εν λόγω ακολουθία και αποδίδει μη αρνητικό αριθμό (και ενδεχομένως ικανοποιεί και περαιτέρω ιδιότητες όπως π.χ. η γραμμικότητα).*

Το ερώτημα που προκύπτει είναι ποια τιμολόγηση συνάδει με τις τιμές που στην πραγματικότητα παρατηρούμε στις χρηματοοικονομικές αγορές. Το παρακάτω είναι ένα θεώρημα (όχι αυστηρά διατυπωμένο) της χρηματοοικονομικής θεωρίας στο παραπάνω υπόβαθρο. Βασίζεται σε υποθέσεις για την οικονομική συμπεριφορά όπως αυτές που μελετούμε στην μικροοικονομική. Η απόδειξη του είναι εκτός των ενδιαφερόντων μας και βασίζεται στο ότι αν το συμπέρασμα του δεν ισχύει, οι συναλλασσόμενοι στην αγορά θα αναπροσαρμόσουν ακαριαία την προσφερόμενη ή την ζητούμενη ποσότητα του τίτλου ώστε να επιτευχθεί το συμπέρασμα.

Θεώρημα Τιμολόγησης. *Αν ισχύουν οι παρακάτω προϋποθέσεις:*

1. *δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγών και ο τίτλος μπορεί να διατεθεί σε όποια ποσότητα κάθε δυνατή στιγμή,*
2. *υπάρχει μοναδικό σταθερό στον χρόνο προεξοφλητικό επιτόκιο μεταξύ διαδοχικών χρονικών στιγμών R>0 στην οικονομία,*
3. *στις αγορές που συναλλάσεται ο τίτλος υπάρχει τέλειος ανταγωνισμός,*
4. *όποια νέα πληροφορία αφορά στον τίτλο διαχέεται ακαριαία στου συναλλασσόμενους,*

τότε η τιμή του τίτλου, p, προσδιορίζεται μοναδικά ως η παρούσα αξία των αποδόσεων του ως προς το προεξοφλητικό επιτόκιο R, δηλαδή ως η σειρά

$$p = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{A_t}{(1+R)^t},$$

εφόσον η τελευταία συγκλίνει.

Βάσει λοιπόν του παραπάνω η τιμή ενός τέτοιου προϊόντος θα είναι μια σειρά που εξαρτάται από τις αποδόσεις του και το προεξοφλητικό επιτόκιο.
Όταν ο τίτλος δεν είναι διηνεκής, βάσει και την ιδιότητας 4 παραπάνω η τιμή θα είναι πεπερασμένου πλήθους άθροισμα και θα υπάρχει πάντα.
Αν είναι διηνεκής τότε η τιμή του θα δίνεται η σειρά εφόσον αυτή συγκλίνει.
Δηλαδή το θεώρημα δεν μας πληροφορεί για το τι συμβαίνει με την τιμή όταν η εν λόγω σειρά αποκλίνει.
Προσπαθήσαμε να αποκτήσουμε μια διαίσθηση για το τι συμβαίνει σε αυτή την περίπτωση βάσει του παρακάτω παραδείγματος.
Έχοντας παράδειγμα διηνεκούς τίτλου υποθέτουμε ότι

$$A_t = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ (1+M)^t C, & t > 0 \end{cases}$$

όπου $C > 0,\ M \geq 0$ και C σταθερό ποσό ενώ M σταθερός ρυθμός μεγέθυνσης των αποδόσεων του τίτλου (π.χ. ρυθμός μεγέθυνσης των μερισμάτων στην περίπτωση μετοχής). Για έναν τέτοιο τίτλο έχουμε ότι

$$p = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{C(1+M)^t}{(1+R)^t}$$

και χρησιμοποιώντας (πως;) τα όσα ξέρουμε για τον λογισμό σειρών και την γεωμετρική σειρά βλέπουμε ότι ανν M<R τότε η τιμή υπάρχει και έχουμε ότι ισούται με $\frac{C(1+M)}{R-M}$ εφόσον σε αυτή την περίπτωση η τιμή είναι γινόμενο του C με γεωμετρική σειρά. Π.χ. όταν $M = 0$ τότε η τιμή γίνεται $\frac{C}{R}$. Όταν όμως $M \geq R$ τότε η σειρά αποκλίνει ως μη φραγμένη. Παρατηρήσαμε ότι σε μια τέτοια

περίπτωση ο ρυθμός μεγέθυνσης των αποδόσεων του τίτλου είναι τουλάχιστον ίσος με τον ρυθμό προεξόφλησης, οπότε ο εν λόγω τίτλος γίνεται ελκυστικότατος. Υπο προυποθέσεις αν η τιμή ενός τέτοιου τίτλου ήταν πεπερασμένη, τότε η ακίνδυνη κερδοσκοπία θα ήταν άμεσα δυνατή μέσω δανεισμού για την αγορά του. Επομένως η συνθήκη που εξασφαλίζει την σύγκλιση της σειράς μπορεί να ερμηνευθεί και ως συνθήκη μη ύπαρξης φούσκας στην τιμή του εν λόγω τίτλου.

B. Δημιουργία Χρήματος μέσω Κλασματικών Διαθεσίμων σε Σύστημα Κεντρικής-Εμπορικών Τραπεζών

Ως δεύτερο παράδειγμα θεωρήσαμε την διαδικασία δημιουργίας χρήματος από το τραπεζικό σύστημα σε διαχρονική οικονομία με χρονισμούς όπως η προηγούμενη, όπου οι τράπεζες περιορίζονται στο να έχουν κλασματικά ρευστά διαθέσιμα (φραψτιοναλ ρεσερωεσ).

Η δομή του παραδείγματος έχει ως εξής:
1. Υποθέτουμε χωρίς μεγάλη απώλεια γενικότητας ότι ως συνολική ποσότητα χρήματος στην εν λόγω οικονομία ορίζεται το σύνολο των τραπεζικών καταθέσεων στις τράπεζες.
2. Οι λειτουργίες των τραπεζών περιορίζονται στο να δέχονται καταθέσεις και να δίνουν δάνεια.
3. Η κεντρική τράπεζα μπορεί να δημιουργεί χρήμα εκ του μηδενός ενώ επιβάλλει στις τράπεζες το να έχουν ως ρευστά διαθέσιμα το aC όπου C το σύνολο των καταθέσεων τους και $a \in [0, 1]$. Αν το $a = 1$ τότε οι τράπεζες περιορίζονται στο να δέχονται και να φυλάσσουν καταθέσεις.

Έστω ότι η Κεντρική Τράπεζα δημιουργεί χρήμα καταθέτοντας το ποσό C στις τράπεζες. Στην συνέχεια αυτές θα πρέπει να διαθέτουν το ποσό aC ενώ μπορούν να δανείζουν το ποσό $(1-a)C$. Το τελευταίο μπορεί (εν μέρει) να επιστρέφει στις τράπεζες ως καταθέσεις. Αν συμβεί κάτι τέτοιο οι τράπεζες μπορούν να δανείσουν ως και το ποσό $(1-a)^2C$. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται διαδοχικά οπότε στο νιοστό στάδιο της οι τράπεζες μπορούν να δανείζουν ως και το ποσό $(1-a)^nC$. Οπότε η ακολουθία

$$((1-a)^nC)$$

πληροφορεί για το άνω φράγμα της *καινούργιας* ποσότητας χρήματος σε κάθε στάδιο της διαδικασίας, ενώ η ακολουθία μερικών αθροισμάτων αυτής

$$(\sum_{i=0}^{n}(1-a)^iC)$$

πληροφορεί για το άνω φράγμα της *συνολικής* ποσότητας χρήματος σε κάθε στάδιο της διαδικασίας. Προφανώς, όταν $a > 0$ το όριο αυτής (γιατί υπάρχει;) θα αποτελεί το άνω φράγμα της *συνολικής* ποσότητας χρήματος που μπορεί να δημιουργηθεί εντός του τραπεζικού συστήματος μέσω της παραπάνω διαδικασίας. Αυτό θα είναι η σειρά (γιατί;)

$$\sum_{i=0}^{\infty}(1-a)^i C = \frac{C}{a}.$$

Όταν το $a = 0$ οπότε δεν υπάρχει υποχρέωση διακράτησης διαθεσίμων, τότε το παραπάνω όριο δεν υπάρχει καθώς η παραπάνω ακολουθία μερικών αθροισμάτων αποκλίνει ως μη φραγμένη.

Ασκήσεις

1. Προσπαθήστε να ερμηνεύσετε αυστηρά στα πλαίσια της οικονομικής θεωρίας το τι συμβαίνει με την τιμή του τίτλου όταν δεν ισχύει η συνθήκη μη ύπαρξης φούσκας.
2. Προσπαθήστε να ερμηνεύσετε αυστηρά στα πλαίσια της οικονομικής θεωρίας το τι θα συνέβαινε στο άνω φράγμα της συνολικής προσφοράς χρήματος αν οι εμπορικές τράπεζες δεν είχαν υποχρέωση διακράτησης ρευστών διαθεσίμων ($a = 0$);