Απόλυτη Σύγκλιση

Είμαστε έτοιμοι για την εξέταση της εκλέπτυνσης της σύγκλισης που θα μας οδηγήσει στο κριτήριο του πηλίκου.

Ορισμός [Απόλυτη Σύγκλιση - Absolute Convergence]

Η σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ θα συγκλίνει απολύτως αν η $\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|$ συγκλίνει. □

Σχόλια:

1. Κίνητρο για την μελέτη της παραπάνω έννοιας μας δίνει η διαφορετική ασυμπτωτική συμπεριφορά δύο συγκλινουσών σειρών. Αφενός για την γεωμετρική σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} a^i$, $|a|<1$ έχουμε ότι και η $\sum_{i=0}^{\infty} |a|^i$ είναι συγκλίνουσα, οπότε τα πρόσημα των όρων της φαίνεται ότι δεν επηρεάζουν το αν η σειρά θα συγκλίνει, αφετέρου για την εναλλάσσουσα αρμονική έχουμε ότι $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1}$ συγκλίνει μεν, αλλά η $\sum_{i=0}^{\infty} \left|\frac{(-1)^i}{i+1}\right| = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1}$ αποκλίνει οπότε σε αυτή την περίπτωση τα

πρόσημα και ενδεχομένως η θέση τους μέσα στη σειρά φαίνεται να επηρεάζουν το ζήτημα της σύγκλισης. Φαίνεται λοιπόν ότι στην πρώτη περίπτωση λειτουργεί κάποια πιο σταθερή δομή που δεν υπάρχει στην δεύτερη. Αυτή ακριβώς περιγράφεται από την έννοια της απόλυτης σύγκλισης.

2. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η γεωμετρική σειρά συγκλίνει απολύτως ενώ η εναλλάσσουσα αρμονική όχι. Αν μια σειρά συγκλίνει αλλά όχι απολύτως τότε ονομάζεται κατά συνθήκη συγκλίνουσα (conditionally convergent). □

Το επόμενο αποτέλεσμα ξεκαθαρίζει την σχέση μεταξύ σύγκλισης και απόλυτης σύγκλισης.

Λήμμα [Απόλυτη Σύγκλιση] Αν η $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ συγκλίνει απολύτως τότε συγκλίνει.

Απόδειξη. Δίνεται ότι η $\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|$ συγκλίνει. Επίσης έχουμε ότι $x_i+|x_i|\geq 0\ \forall i\in\mathbb{N}$, επομένως (γιατί;) η $\sum_{i=0}^{\infty}(x_i+|x_i|)$ θα συγκλίνει αν η ΑΜΑ $\left(\sum_{i=0}^{n}(x_i+|x_i|)\right)$ είναι φραγμένη. Έχουμε όμως ότι

$$x_i+|x_i|\leq 2|x_i|\ \forall i\in\mathbb{N} \Rightarrow \sum_{i=0}^{n}(x_i+|x_i|)\leq \sum_{i=0}^{n}2|x_i|,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Επομένως η $\left(\sum_{i=0}^{n}(x_i+|x_i|)\right)$ θα είναι φραγμένη αν η $\sum_{i=0}^{\infty}2|x_i|$ συγκλίνει (γιατί;)

Αλλά από το δεδομένο και την άλγεβρα σειρών (συμπληρώστε) έχουμε ότι $2\sum_{i=0}^{\infty}|x_i|=\sum_{i=0}^{\infty}2|x_i|$ επομένως η $\sum_{i=0}^{\infty}2|x_i|$ συγκλίνει και

συνεπώς το ίδιο συμβαίνει και με την $\sum_{i=0}^{\infty}(x_i+|x_i|)$. Αυτό μαζί με

την απόλυτη σύγκλιση και τις αλγεβρικές ιδιότητες των σειρών συνεπάγονται ότι $\sum_{i=0}^{\infty}x_i=\sum_{i=0}^{\infty}(x_i+|x_i|-|x_i|)=\sum_{i=0}^{\infty}(x_i+|x_i|)-\sum_{i=0}^{\infty}|x_i|$

οπότε το ζητούμενο έπεται. □

Προφανώς το αντίστροφο δεν ισχύει (δείτε το παράδειγμα εναλλάσσουσας αρμονικής - αρμονικής σειράς) οπότε η απόλυτη σύγκλιση είναι ισχυρότερη έννοια της συνήθους σύγκλισης. Τα παραπάνω μας λένε ότι το σύνολο των συγκλινουσών σειρών διαμερίζεται στο υποσύνολο των απολύτως συγκλινουσών και σε αυτό των υπό συνθήκη συγκλινουσών, χαρακτηριστικό μέλος του οποίου είναι η εναλλάσσουσα αρμονική σειρά.

Το Θεώρημα των σειρών του Riemann [Riemann Series Theorem] - που είναι προφανώς εκτός ύλης - μας λέει πως έχει σημασία σε μια κατά συνθήκη συγκλίνουσα σειρά η διάταξη των όρων της, καθώς για κάθε $M \in \mathbb{R}$ [ή $M = \pm\infty$] οι όροι μπορούν να επαναδιαταχθούν κατάλληλα ώστε η σειρά να συγκλίνει στο M [ή να αποκλίνει προς το $\pm\infty$]. Επομένως "εντός" κατά συνθήκη συγκλίνουσας σειράς οι συνηθισμένες αλγεβρικές ιδιότητες [μεταθετικότητα κ.ο.κ.] δεν ισχύουν. Αντιθέτως ισχύουν κανονικά για τις απολύτως συγκλίνουσες σειρές, οπότε σε αυτό συνίσταται η σοβαρή μαθηματική δομή στην οποία αναφερθήκαμε παραπάνω.

Κριτήριο του Πηλίκου (Ratio Test)

Το κριτήριο του πηλίκου είναι αλγόριθμος ο οποίος εκμεταλλεύεται την παραπάνω δομή προκειμένου να μας πληροφορήσει (σε κάποιες περιπτώσεις) για το αν δεδομένη σειρά συγκλίνει απολύτως ή αποκλίνει. Η περιγραφή που δίνεται παρακάτω δεν είναι πλήρης, είναι όμως επαρκής για σχεδόν ότι συναντήσουμε.

Αλγόριθμος - Κριτήριο του Πηλίκου

Έστω η σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$:

1. Κατασκευάζουμε εφόσον είναι εφικτό τα πηλίκα

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2. Εφόσον υπάρχει βρίσκουμε το όριο της ακολουθίας

$\left(\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}\right)$, έστω ότι $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \to \ell$.

3. Αν ℓ
- <1 τότε η $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ συγκλίνει απολύτως.
- >1 τότε η $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ αποκλίνει.
- $=1$ τότε το κριτήριο είναι μη πληροφοριακό. □

Σχόλια:

1. Η κατασκευή των πηλίκων μπορεί να εμποδίζεται από το ότι άπειρο πλήθος όρων της (x_n) μπορεί να είναι ίσο με το 0. Αν μόνο πεπερασμένο πλήθος είναι μη μηδενικοί τότε η $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ συγκλίνει απολύτως ως πεπερασμένο άθροισμα. Σε αντίθετη περίπτωση οι μηδενικοί όροι μπορούν να αγνοηθούν με κατάλληλο μετασχηματισμό του δείκτη (θα δούμε παραδείγματα!).

2. Η περιγραφή του αλγορίθμου παραπάνω δεν είναι πλήρης καθώς π.χ. δεν περιγράφεται το πως

Αποτυγχάνει το κριτήριο όταν η $\left(\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}\right)$ δεν έχει όριο. Προκειμένου να συμπληρωθεί μας χρειάζονται έννοιες όπως αυτή του limsup η οποία είναι όμως εκτός του εύρους του μαθήματος.

3. Υπάρχουν περιπτώσεις όπου το κριτήριο δεν μπορεί να μας πληροφορήσει για την ασυμπτωτική συμπεριφορά της σειράς (π.χ. όταν $l=1$). Είναι εμφανές (γιατί;) ότι κάτι τέτοιο θα ισχύει όταν η σειρά είναι κατά συνθήκη συγκλίνουσα. Θα δούμε ότι το κριτήριο είναι δυνατόν να είναι μη πληροφοριακό και σε άλλες περιπτώσεις. Όταν συμβαίνει κάτι τέτοιο έχουν αναπτυχθεί επεκτάσεις του κριτηρίου που μπορεί να είναι πληροφοριακές, με τις οποίες όμως δεν θα ασχοληθούμε. □

Παραδείγματα

1. Έστω η $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^i}{i!}$. Έχουμε ότι $\frac{e^i}{i!} \neq 0 \ \forall i \in \mathbb{N}$, επομένως

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{|e^{n+1}/(n+1)!|}{|e^n/n!|} = e\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{e}{n+1} \to 0 < 1.$$

Επομένως έχουμε απόλυτη σύγκλιση.

2. Έστω η $\sum_{i=0}^{\infty} e^i/(i+1)$. Έχουμε ότι $e^i/(i+1) \neq 0 \ \forall i \in \mathbb{N}$, επομένως

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{|e^{n+1}/(n+2)|}{|e^n/(n+1)|} = e\frac{n+1}{n+2} \to e > 1$$

επομένως η σειρά αποκλίνει.

3. $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i e^i / (i+1)$. Όπως η παραπάνω (γιατί;).

4. $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+1)}{e^i}$. Απευθείας από το παράδειγμα 2 (γιατί;) παρατηρούμε ότι σε αυτή την περίπτωση $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \to \frac{1}{e} < 1$ οπότε έχουμε απόλυτη σύγκλιση.

5. $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i e^i / (i+1)$. Όπως η προηγούμενη (γιατί;).

6. $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i$. Όταν $\alpha = 0$ οι $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}$ δεν ορίζονται για κανένα n, αλλά τότε $\sum_{i=0}^{\infty} 0^i = 0^0 + 0^1 + \ldots + 0^n + \ldots = 1$. Όταν $\alpha \neq 0$ έχουμε ότι $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{|\alpha^{n+1}|}{|\alpha^n|} = |\alpha| \to |\alpha|$. Επομένως το κριτήριο μας λέει ότι έχουμε απόλυτη σύγκλιση όταν $|\alpha| < 1$ και απόκλιση όταν $|\alpha| > 1$ όπως ήδη γνωρίζουμε. Παρατηρούμε ότι όταν $\alpha = 1$ ή -1 το κριτήριο είναι μη πληροφοριακό. Γνωρίζουμε όμως ότι τότε έχουμε απόκλιση.

Συνεπώς βρήκαμε παράδειγμα μη πληροφοριακό-τητας για αποκλίνουσες σειρές.

7. $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1}$. Έχουμε ότι $\frac{(-1)^i}{i+1} \neq 0 \ \forall i \in \mathbb{N}$, επομένως

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{|(-1)^{n+1}/(n+2)|}{|(-1)^n/(n+1)|} = \frac{n+1}{n+2} \to 1,$$ οπότε το

κριτήριο είναι μη πληροφοριακό όπως περιμέναμε αφού η σειρά είναι κατά συνθήκη συγκλίνουσα.

8. Για $p \geq 2$ έχουμε την $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^p}$.

Εφόσον $\frac{1}{(i+1)^p} > 0 \ \forall i \in \mathbb{N}$, $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{|1/(n+2)^p|}{|1/(n+1)^p|}$

$= \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^p \to 1$ επομένως το κριτήριο είναι μη πληροφοριακό. Γνωρίζουμε όμως ότι πρόκειται για την υπεραρμονική σειρά που είναι συγκλίνουσα, και άρα απολύτως συγκλίνουσα (γιατί;) στο $\zeta(p)$, όπου ζ η συνάρτηση Ζήτα του Riemann [Riemann Zeta Function]. Επομένως έχουμε και παράδειγμα μη πληροφοριακότητας και ως απολύτως συγκλίνουσα σειρά. □

Τα παραδείγματα λοιπόν συνεπάγονται ότι το κριτήριο είναι δυνατόν να είναι μη πληροφοριακό τόσο για σειρές που συγκλίνουν κατά συνθήκη, όσο και για σειρές που αποκλίνουν ή συγκλίνουν απολύτως.

Άσκηση. Θα ήταν δυνατόν το κριτήριο να είναι μη πληροφοριακό αν η σειρά ήταν κατά συνθήκη συγκλίνουσα;

[Μερική Απόδειξη της Λειτουργίας του Κριτηρίου όταν $l<L$].

Έστω ότι $l<L$. Θα δείξουμε ότι η $\sum_{i=0}^{\infty}|x_i|$ συγκλίνει.

Αρκεί να δείξουμε ότι η ΑΜΑ $\left(\sum_{i=0}^{n}|x_i|\right)$ είναι φραγμένη (γιατί;). Αφού $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}\to l<L$, $\exists\, \varepsilon>0$: $l+\varepsilon<L$ (π.χ. $\varepsilon=\frac{|L-l|}{2}$) και $\exists\, n_\varepsilon^*$:

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}\in(l-\varepsilon,\, l+\varepsilon)\quad \forall n\geq n_\varepsilon^*.$$

Επομένως $\forall n\geq n_\varepsilon^*$ $\quad \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}<l+\varepsilon \quad \Longrightarrow$

$\forall n \geq n_\varepsilon^* \quad |x_{n+1}| \leq (\ell+\varepsilon)|x_n| \leq (\ell+\varepsilon)^2 |x_{n-1}|$

$\leq \ldots \leq (\ell+\varepsilon)^{n+1-n_\varepsilon^*} |x_{n_\varepsilon^*}|$ αναδρομικά.

Οπότε $\sum_{i=0}^{n} |x_n| = \sum_{i=0}^{m-1} |x_i| + \sum_{i=m}^{n} |x_i|$ όπου $m = \max\{n_\varepsilon^*, n\}$. Παρατηρούμε ότι το $\sum_{i=0}^{m} |x_i|$ συγκλίνει ως πεπερασμένο άθροισμα, επομένως αρκεί (γιατί;) να δείξουμε ότι η $\left(\sum_{i=m}^{n} |x_i|\right)$ είναι φραγμένη. Αλλά για $n < n_\varepsilon^*$ το $\sum_{i=m}^{n} |x_i|$ είναι μηδέν, ενώ όταν $n \geq n_\varepsilon^*$ εξαιτίας των παραπάνω ανισοτήτων $\sum_{i=n_\varepsilon^*}^{n} |x_i| \leq \sum_{i=n_\varepsilon^*}^{n} (\ell+\varepsilon)^{i-n_\varepsilon^*} |x_{n_\varepsilon^*}| = |x_{n_\varepsilon^*}| \sum_{i=n_\varepsilon^*}^{n} (\ell+\varepsilon)^i$.

Εξαιτίας των ιδιοτήτων της γεωμετρικής σειράς και αφού $\ell+\varepsilon < 1$ έχουμε ότι $\sum_{i=n_\varepsilon^*}^{\infty} (\ell+\varepsilon)^i = \dfrac{(\ell+\varepsilon)^{n_\varepsilon^*}}{1-(\ell+\varepsilon)}$

οπότε η ακολουθία που φράσσει όρο προς όρο από πάνω την $\left(\sum_{i=0}^{n} |x_i|\right)$ είναι συγκλίνουσα και άρα φραγμένη (γιατί;) οπότε και η $\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|$

είναι φραγμένη (γιατί;). □

Άσκηση. Δείξτε το ίδιο, ότι δηλαδή αν $\ell>1$ τότε η σειρά αποκλίνει.

Άσκηση. Δείξτε ότι αν η $\left(\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}\right)$ μη φραγμένη τότε το κριτήριο μας δείχνει απόκλιση.

Άσκηση. Προσπαθήστε να καταλάβετε γιατί το κριτήριο είναι μη πληροφοριακό όταν $\ell=1$.